МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

XII

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА • 1967

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Московское математическое общество
Институт общего и политехнического образования
Академии педагогических наук

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

XII.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1967

В сборниках "Математическая школа" публикуются учебные материалы московских специализированных школ №№ 2,7, 444, школы-интерната № 18 при МГУ и Вечерней математической школы при механико-математическом факультете МГУ. Материалы имеют экспериментальный характер. Руководит изданием редакционный совет в составе:

Э.Б.ВИНБЕРГ, Е.Б.ДЫНКИН, А.А.ЕГОРОВ, Т.И.КУЗНЕЦОВА, Х.М.РАББОТ (зам.редактора), С.И.ШВАРЦБУРД (редактор), И.М.ЯГЛОМ.

Содержание.

1. В школе № 2.

Семинары в 10-х классах ..... 3.

2. В Вечерней математической школе.

А.Л.РОЗЕНТАЛЬ. Решение задач первого цикла для 7-ых классов . . . . . 23.

Б.В.ГРИГОРЬЕВ. Решение задач для 9-10 классов .. 43.

Конкурсные задачи ..... 69.

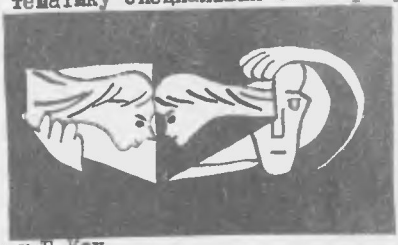
Летний конкурс ВМШ ..... 78.

3. Материалы вступительных экзаменов ..... 83.

В ШКОЛЕ №2

Во втором семестре в IO-х классах школы № 2 обычная система семинарских занятий перестраивается. Организованы семинары для подготовки к экзаменам (повторение пройденного материала) и специальные семинары на разные темы. Школьники участвуют в одном из таких спецсеминаров по выбору.

Ниже мы приводим краткую тематику специальных семинаров, работающих весной 1967 года.



Группы Ли.

Руководители Э.Б.Винберг и В.Кац.

Рассмотрим множество всех движений плоскости. Оно является группой относительно операции композиции (последовательного выполнения) преобразований.

С другой стороны, в это множество можно ввести координаты*); например, движение, сохраняющее ориентацию, можно задавать координатами образа какой-либо одной точки и углом поворота векторов.

---

*) Сравните с семинаром Иоффе "Гладкие многообразия", настоящий выпуск, стр. 15 .

Группа, в которую можно ввести координаты, при выполнении некоторых естественных требований называется группой Ли. Число координат называется ее размерностью.

Так, группа движений плоскости является 3-мерной группой Ли, группа аффинных преобразований - 6-мерной группой Ли, а группа проективных преобразований - 8-мерной группой Ли.

Во всех этих примерах мы имеем дело с группами Ли преобразований. Таким группам, в основном, и посвящен семинар.

Простейшими группами Ли являются одномерные (*или* однопараметрические) группы. Пусть $\{g_t\}$ - однопараметрическая группа преобразований m-мерного пространства R^m (например, плоскости, если $m=2$). Параметр t можно выбрать так, чтобы $g_t g_s = g_{t+s}$ для любых t, s. Тогда g_0 будет тождественным преобразованием.

Обозначим через $\gamma(x)$ $(x \in R^m)$ вектор, касательный к кривой $g_t(x)$ при $t=0$. Получим векторное поле γ, которое называется полем скоростей группы g_t.

Оказывается, что однопараметрическая группа полностью определяется своим полем скоростей. Аналогичная теорема имеет место и для многомерных групп.

Пусть G - произвольная группа Ли преобразований пространства R^m. Множество $\mathcal{G}$ полей скоростей всех однопараметрических групп, содержащихся в G, называется алгеброй Ли группы G. Оно обладает следующими свойствами:

1/ если $\gamma \in \mathcal{G}$ и c - число, то $c\gamma \in \mathcal{G}$;

2/ если $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{G}$, то $\gamma_1 + \gamma_2 \in \mathcal{G}$,

и потому является векторным пространством.

Размерность $\mathcal{G}$ как векторного пространства равна размерности G. Группа G, если только она связна, однозначно определяется своей алгеброй Ли $\mathcal{G}$.

Для любых двух векторных полей γ_1, γ_2 определяется векторное поле $[\gamma_1, \gamma_2]$, называемое их коммутатором. Если γ_1 и γ_2 принадлежат алгебре Ли $\mathcal{G}$ некоторой группы Ли G, то $[\gamma_1, \gamma_2] \in \mathcal{G}$. Операция коммутирования в $\mathcal{G}$ отражает свойства умножения в группе G. Например, для того чтобы группа G была коммутативна, необходимо и достаточно, чтобы $[\gamma_1, \gamma_2] = 0$ для всех $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{G}$.

Важным для физики примером группы преобразований является группа вращений 3-мерного пространства. Это 3-мерная группа Ли. Ее алгебра Ли состоит из векторных полей вида

$$\gamma_a(x) = a \times x ,$$

где a , x - векторы, а знаком $\times$ обозначено векторное умножение.

Имеет место формула

$$[\gamma_a, \gamma_b] = \gamma_{a \times b}$$

Это объясняет ту роль, которую играет векторное умножение в физике.

Линейные представления конечных групп.

Руководители В.Мазо и М.Шнловер

Пусть G - группа и пусть каждому элементу $g \in G$ поставлено в соответствие невырожденное линейное преобразование конечномерного векторного пространства, причем произведению двух элементов группы G соответствует произведение отвечающих им линейных преобразований, а обратному элементу - обратное преобразование. Указанное соответствие называется линейным представлением исходной группы G.

Семинар ставит две основных задачи:

а/ доказательство основных теорем о линейных представлениях конечных групп;

б/ отыскание всех предотавлений некоторых конкретных групп.

Первые занятия семинара посвящаются изучению необходимых сведений из теории групп и теории линейных операторов в конечномерных векторных пространствах.

Изучение предотавлений начинается с введения понятия неприводимого представления, играющего роль простейшего представления, затем доказывается теорема о разложении любого представления конечной группы в прямую сумму неприводимых представлений. Эта теорема позволяет ограничиться изучением лишь неприводимых представлений.

Далее, доказываются три основные теоремы о неприводимых представлениях:

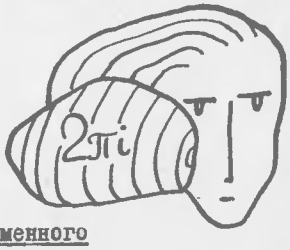
а/ сумма квадратов размерностей всех неприводимых представлений равна порядку группы;

б/ размерность любого неприводимого представления есть делитель порядка группы;

в/ число неприводимых представлений совпадает с числом классов сопряженных элементов данной группы.

В дальнейшем рассматриваются некоторые специальные группы и находятся все их неприводимые представления. В частности, описываются представления групп вращения правильных фигур, а также симметрической группы.

Основным аппаратом служат упомянутые выше три основных теоремы, а также сплетающие операторы и числа сплетения.



Функции комплексного паременного

Руководители: Андреев Е.М. и Зак Л.С.

Рассматриваются функции одного комплексного переменного, т.е. отображения комплексной плоскости в себя.

Основные определения:

а/ функция $f(z)$ имеет в точке z_0 производную по комплексному переменному /голоморфна в точке z_0 /, если существует предел $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u\neq 0}} \dfrac{f(z_0+u)-f(z_0)}{u}$;

б/ функция $f(z)$ голоморфна в области $\mathcal{D}$, если она голоморфна в каждой точке $z_0 \in \mathcal{D}$;

в/ назовем гладким путем на плоскости множество точек $z(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in[a,b]$, где $x(t), y(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции переменного t. Путь γ - кусочно гладкий, если функции $x(t), y(t)$ непрерывны всюду и дифференцируемы всюду, кроме конечного числа точек;

г/ дифференциальной формой называется выражение вида: $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = P(z)dx + Q(z)dy$;

д/ если γ - гладкий путь, ω - дифференциальная форма, то по определению,

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left(P(x(t))\,y(t)\right) x_t' + Q(x(t), y(t))\, y_t'(t)\, dt;$$

е/ форма ω замкнута в области $\mathcal{D}$, если $\int_\gamma \omega = 0$ для любого замкнутого кусочно гладкого пути $\gamma \subset \mathcal{D}$.

В ходе работы семинара будут доказаны следующие основные утверждения:

а/ если функция $f(z)$ голоморфна в области $\mathcal{D}$, то форма $f(z)dz = f(z)dx + if(z)dy$

замкнута в области $\mathcal{D}$;

б/ если функция голоморфна в круге $|z|<\rho$, то она разлагается в этом круге в ряд по степеням z.

Затем будут исследованы свойства интеграла Коши. Будет показано, что

$$\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a} = 2\pi i f(a),$$

где γ - путь, один раз окружающий точку a.

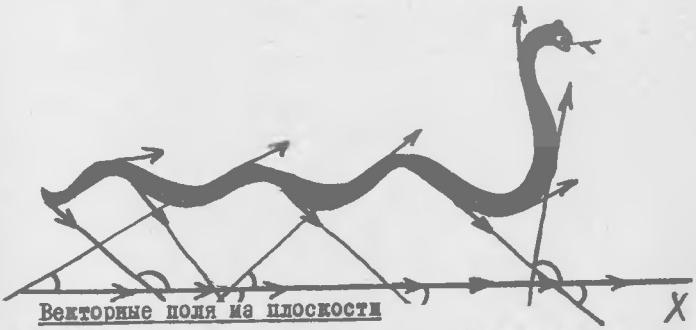
С помощью этого аппарата будет доказано, что:

а/ всякая функция, голоморфная и ограниченная во всей плоскости, постоянна;

б/ всякий многочлен имеет хотя бы один комплексный корень;

в/ если $|f| < |z|^n$, то $f(z)$ - многочлен степени не выше n ;

г/ две голоморфные функции, равные на множестве, имеющем предельную точку, равны.



Векторные поля на плоскости

Руководители Ю.Лысенко, Д.Эйдельхайд

Под векторным полем, заданным на множестве M , мы будем понимать функцию, заданную на этом множестве и принимающую векторные значения. В случае, когда множество M есть кривая без самопересечений, а функция непрерывна и не принимает нулевых значений, можно ввести непрерывную "угловую функцию", равную углу между вектором и осью "OX".

Разность значений угловой функции на концах кривой, отнесенная к полному обороту "2π", называется вращением. Легко видеть, что, если кривая замкнута, то вращение - целое число.

В теории векторных полей на плоскости можно выделить две идеи. Одна из них вытекает из важной теоремы:

Если векторное поле непрерывно в области и не принимает нулевых значений, то его вращение на границе области равно нулю.

Если же векторное поле имеет нули внутри области, но они изолированы, то вращение поля по окружности малого радиуса, содержащей любой из этих нулей, не зависит от радиуса. Это число называется индексом "особой точки".

Вращение поля на границе области равно сумме индексов особых точек.

Различным способом вычислений индексов посвящена первая часть семинара.

Вторая идея заключается в таком очевидном факте: Если "мало" изменить векторы поля, то и вращение изменится "мало". В силу того, что вращение - целое число, оно просто не изменится. Эта идея приводит к понятию гомотопности векторных полей.

Теория векторных полей имеет различные приложения. С ее помощью красиво и просто доказываются, например, теорема о существовании неподвижной точки при отображении круга в себя и "основная теорема алгебры".

Алгебры кватернионов и некоторые приложения их в теории чисел

Руководитель В.А.Исковских

Кольцо A, снабженное структурой конечномерного векторного пространства над полем k, называется (ассоциативной) алгеброй. При этом предполагаются выполненными условия:

$\lambda(a\cdot b)=(\lambda a)\cdot b=a(\lambda b)$ для любых $\lambda\in k$ и $a,b\in A$.

Размерность пространства A над k обычно называют рангом алгебры A над полем k.

Если $(e_1,\dots,e_n)$ – какой-нибудь базис пространства A, то закон умножения в A однозначно восстанавливается по таблице умножения для базисных элементов

$$e_i e_j=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ijk}e_k;\quad 1\le i\le n,\ 1\le j\le n,\ \gamma_{ijk}\in k.$$

Для всевозможных алгебр ранга n над k набор $\{\gamma_{ijk}\}$ из n^3 элементов $\gamma_{ijk}\in k$ не произволен: γ_{ijk} связаны соотношениями, вытекающими из ассоциативности умножения.

Будем предполагать, что A обладает единицей относительно умножения, и обозначать ее просто I, отождествляя при этом элементы $\lambda\in k$ с $\lambda\cdot 1\in A$. Если для некоторой пары элементов $a,b\in A$ выполнены соотношения

$$a\cdot b=0,\ a\neq 0,\ b\neq 0,$$

то a и b называются делителями нуля, соответственно a – левым, b – правым.

А называется алгеброй с делением или телом, если для любых $a, b \in A$, $a \neq 0$ уравнение $a \cdot x = b$ разрешимо в А.

Теорема I. Для того, чтобы алгебра А была алгеброй с делением, необходимо и достаточно, чтобы А не имела делителей нуля.

Алгебра А ранга 4 над полем k называется алгеброй (обобщенных) кватернионов, если в пространстве А существует базис $(1, u, v, w)$, для которого таблица умножения имеет вид:

$$u^2 = \alpha,\ v^2 = \beta,\ u \cdot v = -v \cdot u = w \qquad (\alpha, \beta \in k)$$

Теорема 2. Любая некоммутативная алгебра с делением ранга 4 над k [x)] является алгеброй кватернионов.

Элементы алгебры кватернионов А называются кватернионами. Пусть $a = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot u + \alpha_2 v + \alpha_3 w$ - кватернион, тогда кватернион $\bar{a} = \alpha_0 \cdot 1 - \alpha_1 \cdot u - \alpha_2 v - \alpha_3 w$ - называется сопряженным к a. Для каждого кватерниона $a \in A$ определена норма $N(a) = a \cdot \bar{a} = \alpha_0^2 - \alpha \cdot \alpha_1^2 + \beta \alpha_2^2 + \alpha\beta\alpha_3^2$. Ясно, что $N(a) \in k$ и $N(a \cdot b) = N(a) \cdot N(b)$, $a, b \in A$.

Теорема 3. Для того, чтобы алгебра кватернионов А была алгеброй с делением, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2 + \alpha\beta x_3^2 = 0$$

не имело ненулевого решения в k.

---

x/ Мы всегда предполагаем, что k не содержит подполя из двух элементов.

Пусть $\Phi_1 = \sum_{i,j=1}^{3} \mu_{ij} x_i x_j$ и $\Phi_2 = \sum_{i,j=1}^{3} v_{ij} x_i x_j$ где $\mu_{ij}, v_{ij} \in k$ - две квадратичные формы от трех переменных над k. Формы Φ_1 и Φ_2 называются проективно эквивалентными, если с точностью до множителя из k одна в другую может быть переведена линейной обратимой заменой переменных с коэффициентами из k.

Теорема 4 (Витт). Существует естественное взаимно однозначное соответствие между кватернионными алгебрами A над k и классами проективно эквивалентных невырожденных квадратичных форм от трех переменных Φ.

Пусть теперь $k = Q$ - поле рациональных чисел, A - алгебра обычных кватернионов, т.е.

$$u^2 = -1,\ v^2 = -1,\ u \cdot v = -v \cdot u = w.$$

Теорема 5. Для любого простого числа p существует кватернион $a = \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w$ с целыми коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ такой, что $N(a) = p$.

Следствие (теорема Лагранжа). Каждое целое положительное число представляется в виде суммы четырех квадратов целых чисел.

При доказательстве теоремы 5 используется следующая

Теорема 6. (Шевалле). Если $F(x_1, \ldots, x_n)$ - форма степени $r < n$, то сравнение $F(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{p}$ имеет ненулевое решение.

Литература: I. Чеботарев Н.Г. Теория алгебр

2. Боревич З.Н., Шафаревич И.Р. Теория чисел.

3. Линник Ю.В. Кватернионы и числа Кели; некоторые приложения арифметики кватернионов. УМН, 4, № 5(33),(1949 г.).

Семинар по топологии

Руководители: А.А.Коробов и В.Л.Попов

Определено понятие топологического пространства (всякое метрическое пространство является топологическим) и непрерывного отображения.

Пространства, между которыми существуют взаимнооднозначные и непрерывные в обе стороны отображения, называются гомеоморфными.

Определено понятие гомотопии отображения и гомотопической эквивалентности пространств.

Каждому пространству X сопоставляется набор абелевых групп $H_n(X)$ такой, что любое непрерывное отображение $f: X \to Y$ индуцирует гомоморфизмы

$$f_{n*}: H_n(X) \to H_n(Y)$$

Была указана непосредственная конструкция таких групп (сингулярная теория) вычислены гомологии некоторых конкретных пространств.

Основные теоремы:

а/ точность гомологической последовательности пары, свойства дифференциала, аксиома вырезания и гомотопии;

б/ гомологии клеточных комплексов;

в/ теоремы Лефшеца об индексах неподвижных точек и теорема Брауэра об отображении шара в себя;

г/ связь эйлеровой характеристики и индексов особых точек векторных полей.

ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Руководитель Л.Иоффе

Идея аналитической геометрии состоит в том, чтобы исследовать геометричеокие сбъекты с помощью аналитических средств. Для этого на евклидовой плоскости вводится система косрдинат, наличие которой позволяет многие геометрические задачи решать методами алгебры и анализа.

Попробуем снабдить координатами двумерную поверхность M^2, расположенную в трехмеряом евклидовом пространстве E^3. Вернее, мы заранее зададим ее так, что на M^2 будет существовать система координат.

Пусть $\mathcal{D}^2$ -открытый круг на плоскости E^2, а E^3- трехмерное евклидово пространство

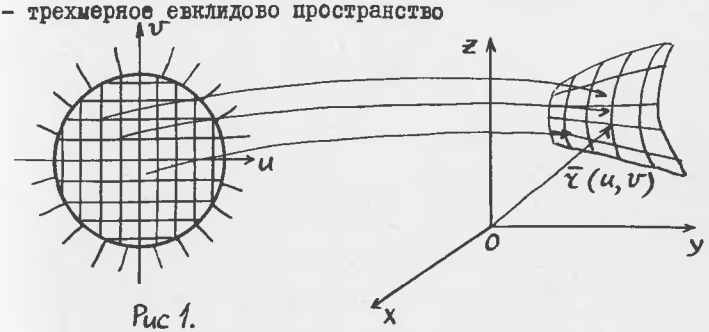


Рис 1.

Координаты в $\mathcal{D}^2 \subset E^2$ - (u,v) - координаты вектора $\bar{r} \in E^3$ - (x,y,z). Пусть каждой точке $(u,v) \in \mathcal{D}^2$ соответствует $\bar{r}(u,v)$, причем,

если $(u,v) \neq (u',v')$, то $\bar{r}(u,v) \neq \bar{r}(u',v')$. Тогда на $\mathcal{D}^2$ задана гладкая (это - дополнительное предположение) векторная функция $\bar{r}(u,v)$.

Если теперь точка (u,v) пробегает $\mathcal{D}^2$, то $r(u,v)$ заметает некоторую поверхность M^2 в E^3 (гладкость $\bar{r}(u,v)$ означает, что M^2 не имеет уголков).

На M^2 действительно есть координаты. Просто точка $\bar{r}(u_0, v_0)$ имеет координаты (u_0, v_0) .

Теперь для любой точки $m \in M^2$, $m=r(u,v)$ и любой функции φ: $\varphi(m) = \varphi(\bar{r}(u,v)) = f(u,v)$, т.е. функции на M^2 есть функции от (u,v) на $\mathcal{D}^2$.

Координатными линиями на M^2 будут линии $\bar{r}(c,v)$ - (c - фиксировано, v меняется) при различных c и $\bar{r}(u,c)$ - (c фиксировано, u меняется) при различных c . Некоторые поверхности, такие как сферу, тор и др., так задать нельзя, потому что они не гомеоморфны открытому кругу.

Замечание. Открытому кругу гомеоморфна лишь сфера с выколотой точкой.

Но маленькие участки этих поверхностей устроены так же, как и круг, поэтому можно ввести не одну, а несколько координатных систем, наз. "локальными системами координат", причем эти системы вместе обслуживают уже всю поверхность.

Более точно: n -мерным многообразием называется пространство*), каждая точка m которого имеет окрест-

---

*) хаусдорфово топологическое проотранство .

ность $\mathcal{U}(m)$, гомеоморфную открытому n-мерному шару $\mathcal{D}^n$ в n-мерном евклидовом пространстве E^n.

В $\mathcal{D}^n$ есть координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$. По гомеоморфизму между $\mathcal{D}^n$ и $\mathcal{U}(m)$ каждой точке $m_0 \in \mathcal{U}(m)$ приписываются координаты $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ ее образа в $\mathcal{D}^n$. Так окрестность $\mathcal{U}(m)$ становится локальной системой координат.

Любой маленький кусочек многообразия можно оборудовать координатами этим способом.

Чтобы $\mathcal{M}^n$ было многообразием, должны выполняться еще некоторые "естественные" условия. Они здесь не упомянуты.

Примеры многообразий.

Рис 2.

а) Двумерная сфера S^2 в E^3.

б) Двумерный тор T^2 или сфера с одной ручкой.

в) Крендель с двумя дырками K_1^2 или сфера с двумя ручками.

г) Крендель с n дырками или сфера с n ручками K_n^2.

2. P^3 -трехмерное проективное пространство.

3. $SO(3)$ - группа вращений E^3.

4. P^n — n-мерное проективное пространство.

Замечания. I) P^3 и P^n - множества прямых, проходящих через начало координат, соответственно, в E^4 и E^{n+1} (Точка P^n - прямая E^{n+1}).

2) P^3 и $SO(3)$ гомеоморфны.

2-1357

5. Множество k-мерных плоскостей, проходящих через начало координат в n-мерном пространстве. Это многообразие (его точка - k-мерная плоскость) называется грассмановым и обозначается $G_{k,n}$. Размерность $G_{k,n}$ равна $k(n-k)$.

Замечание. Размерность $G_{k,n}$ симметрична относительно k и $n-k$. Это следствие того, что грассмановы многообразия, состоящие из k-мерных плоскостей и их $(n-k)$-мерных ортогональных дополнений, гомеоморфны и имеют одинаковую размерность.

6. Многообразие устроено так: точка многообразия - это точка двумерной сферы и единичный касательный вектор в ней, т.е. $(s,\bar{e})$. Это многообразие называется многообразием линейных элементов сферы TS^2; размерность TS^2 равна 3, оно гомеоморфно P^3.

Можно все многообразия - пусть они даже заданы абстрактно, как в примерах 3,5,6 - мыслить себе поверхностями той же размерности, вложенными в евклидово пространство. Именно в этом и состоит смысл теоремы Уитни:

Любое компактное n-мерное многообразие M^n можно вложить в E^{2n+1} без самопересечений (естественно, что это многообразие можно вложить и в E^N, где $N>2n+1$).

Например, бутылку Клейна в E^3 без самопересечений вложить нельзя, а в E^5 - можно. (бутылка Клейна - два склеенных по границе листа Мёбиуса).

Далее мы ограничимся для наглядности двумерными поверхностями M^2, расположенными в E^3. Пусть эти поверхности гладкие, и в каждой точке имеют касательную плоскость.

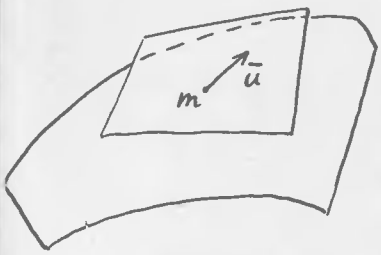


Рис 3.

Вектором на M^2 называется вектор, касательный к M^2, т.е. лежащий в какой-либо из касательных к M^2 плоскостей. Фиксируем точку $m \in M^2$. Все векторы, касательные к M в точке m, образуют векторное пространство размерности два (сумма двух касательных в точке m векторов и произведение касательного вектора на число дают опять касательный вектор).

Это векторное пространство называется касательным.

Складывать же друг с другом векторы, касательные к M^2 в разных точках, нельзя.

Теперь снабдим M^2 римановой метрикой. Это значит превратить каждое касательное векторное пространство в евклидово, т.е. ввести там положительно определенное, невырожденное скалярное произведение (в каждом касательном пространстве - свое скалярное произведение), тогда на M^2 появится длина.

Действительно: две бесконечно близкие точки m_1 и m_2 можно приближенно рассматривать как бесконечно малый касательный к M^2 вектор $d\bar{x}$ с началом, к примеру, в

точке m_1 . Его длина $ds=\sqrt{(d\bar{x},d\bar{x})}$ и есть расстояние между m_1 и m_2 .

Гладкая кривая на M^2 – это отображение (гладкое) отрезка $[0,1]$ в M^2 . Локально она записывается – ведь на M^2 есть координаты – $\bar{\eta}=\{x^i(t)\}$, $i=1,2$ или просто $x^i(t)$.

Чтобы вычислить длину $x^i(t)$, ее надо разбить на кусочки и проинтегрировать.

Длина $S=\int dS=\int\sqrt{(d\bar{x},d\bar{x})}$; здесь скалярное произведение каждый раз берется в соответствующем касательном пространстве.

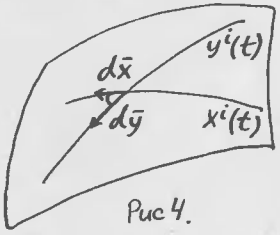


Рис 4.

Угол между двумя кривыми $x^i(t)$ и $y^i(t)$ задается так:

$$\cos\varphi=\frac{(d\bar{x},d\bar{y})}{\sqrt{(d\bar{x},d\bar{x})}\sqrt{(d\bar{y},d\bar{y})}}.$$

Геодезической между точками m_1 и m_2 называется кратчайшая кривая, их соединяющая.

Пример. Модель плоскости Лобачевского – верхняя полуплоскость комплексной плоскости, координаты: (x,y) ; метрика в этих координатах задается так: $ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

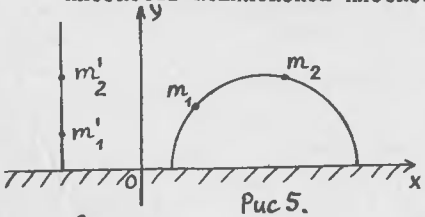


Рис 5.

Геодезической, соединяющей точки m_1 и m_2 будет полуокружность, ортогональная $y=0$ (абсолюту) и проходящая через m_1 и m_2.

Параллельным переносом вектора вдоль геодезичеокой называется перенос, сохраняющий угол между векторов и этой геодезической.

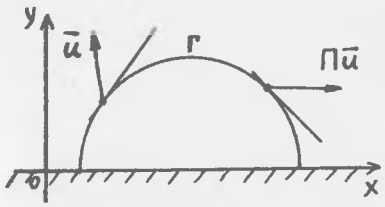


Рис 6.

На рис 6 вектор $\bar{u}$ параллельно перенесен из точки m_1 в точку m_2; Γ – геодезическая.

Кривизна. Рассмотрим двумерную поверхность M^2, расположенную в E^3, точку $m \in M^2$ и окрестность $\mathcal{U}(m)$. Площадь $\mathcal{U}(m)$ равна dS.

Вооставим к $\mathcal{U}(m)$ в каждой точке нормали. В сторонке раоположим единичную сферу и из ее центра будем проводить радиусы параллельно нормалям. Их концы заметут на сфере площадь dn. Точке $m \in \mathcal{U}(m)$ ставится таким образом в соответстве точка $S \in S^2$. Это отображение называетсн сферическим.

$\lim\limits_{ds \to 0} \frac{dn}{ds} = K$ называется гауссовой кривизной поверхнооти в точке m.

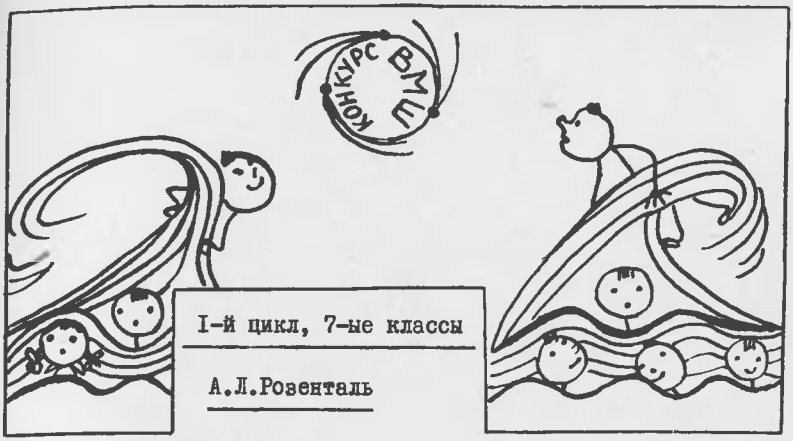
Например, если в точке m поверхнооть имеет гладкий пичок: , то dS мала относительно dn и

2*-1287

кривизна велика.

У плоскости же $K = 0$, т.к. образом любого ее кусочка при сферическом отображении будет одна точка. (Все нормали к плоскости параллельны).

Теорема Гаусса-Бонне. Пусть M^2 -замкнутая поверхность в E^3 с p ручками. Тогда $\iint_{M^2} K(x)\,dS = 4\pi(1-p)$, т.е. $\iint_{M^2} K(x)\,dS$ - топологический инвариант.



I-й цикл, 7-ые классы

А.Л.Розенталь

Первый цикл конкурса этого учебного года включал задачи №№ I-I8. Принципы, положенные в основу работы жюри при подведении итогов, были те же, что и в прошлом учебном году (см. "Математическая школа", вып. IX и X).

Задачи I, II и I4 были решены правильно многими участниками конкурса - за правильное их решение засчитывалось 6 баллов. Правильные решения задач 2, 5, 6, 7, 9 и I6 оценивались в I0 баллов, задачи I5 - в I2 баллов, задачи 3 - в I4 баллов, остальных задач - в 8 баллов.

В этом году в конкурсе семиклассников с большим успехом участвовали шестиклассники - ученик 6 класса "Б" 48 школы Дима Логачев завоевал первую премию. Диме принадлежит наиболее красивое решение задачи I5, это решение приводится ниже. Первой премией отмечена также совместная работа двух семиклассниц из 52 школы - Лизы Широковой и Лены Антоновой. В этой работе содержится изящное решение трудной задачи 3, которое также приводится ниже. Лиза и Лена представили полные решения I6 задач и неполные решения задач I3 и I8. Впрочем, никому из

участников конкурса не удалось полностью решить задачи I3 и I8.

Наиболее успешно в конкурсе выступила группа "С" (руководители ученики I0 класса 2-ой школы Латышев Андрей и Шмуклярский Александр): одна первая, одна вторая, две третьих и три четвертых премии.

Победители конкурса (I цикл)

I-я премия	Широкова Елизавета и Антонова Елена	52 шк., 7, Б гр."С"	(I49) x)
	Логачев Дмитрий	48 шк., 6, Б гр. B_1	(147)
II-я премия	Кемпнер Лев	I09 шк., 6, А гр. B_1	(I32)
	Думер Илья	I4 шк., 7, А гр. F	(I26)
	Гуткина Вера	3 шкл., 7, В гр. C	(II7)
	Аркадьев Владимир	36 шк., 7, Б гр. D	(II5)
III-я премия	Крылов Василий	52 шк., 7, Б гр. D	(I05)
	Примаков Игорь	20 шк., 7, Б гр. A	(I03)
	Кабанов Николай	20 шкл., 7, Б гр. A	(I03)
	Уроев Владимир	29 шк., 7, Б гр. D	(I02)
	Хлюстиков Иван	I75шк., 7, А гр. C	(94)
	Перловский Анатолий	29 шк., 7, А гр. D	(94)
	Блюм Александр	I75 шк., 7, А гр. C	(86)
IУ премия	Пантелеев Олег	850 шк., 7, гр. C	(76)
	Милинская Евгения	2 шк., 6, Б	(76)
	Лебедев Владимир	76 шк., 7, А гр. A	(72)
	Хачияи Грант	850 шк., 7, гр. C	(64)
	Куранова Ирина	2I8 шк., 7, А гр. B	(63)
	Гайсинович Ольга	4 сп.шк., 7, Б гр. C	(58)
	Рубанов Лев и Соколов Сергей	363 шк., 7, А гр. A	(52)
	Шигель Сергей	35 шк., 7, гр. D	(50)

x) В скобках указано количество баллов, набранное участниками конкурса.

Решения задач I цикла для 7-х классов

Задача I. 20 точек расположены, как показано на рис. 7. Сколько можно построить различных квадратов с вершинами в этих точках? Какие 6 точек надо удалить, чтобы нельзя было построить ни одного квадрата с вершинами в оставшихся точках?

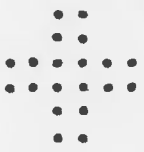


Рис 7.

Решение. Можно построить 21 квадрат: 9 маленьких квадратов (рис. 8б), 8 квадратов со сторонами, образующими углы 45^0 со сторонами маленьких квадратов (на рис. 8б изображены два из них), и еще 4 квадрата, показанные на рис. 8а.

Если удалить 6 точек, как показано на рис. 8в , то нельзя будет построить ни одного квадрата с вершинами в оставшихся точках.

а) б) в)

Рис 8.

Задача № 2. Сеть автобусных маршрутов в городе Лиссе устроена так, что: а) на каждом маршруте имеется K остановок; б) любые два маршрута либо вовсе не имеют общих остановок, либо имеют только одну общую остановку. Какое наибольшее число маршрутов может быть в этом городе, если известно, что имеется всего K^2 различных остатовок?

Семиклассники решали эту задачу для $K = 3$.

Решение. Определим, сколько маршрутов может проходить через данную остановку. Кроме данной, в городе еще K^2-1 остановка. На каждом маршруте, проходящем через данную остановку, есть еще $K-1$ остановка. Так как никакие два из этих маршрутов не могут иметь общих остановок, отличных от данной, то всего через данную остановку

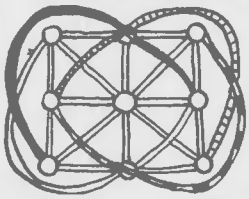


Рис 9.

может проходить не более, чем $\frac{K^2-1}{K-1} = K + 1$ маршрут.

Подсчитаем число маршрутов при условии, что через каждую из K^2 остановок проходит $K+1$ маршрут. Умножив K^2 на $K+1$, мы получим все маршруты, но каждый маршрут в произведении $K^2(K+1)$ учитывается K раз, так

как содержит K остановок. Значит, автобусная сеть города Лисса содержит не более $K(K+1)$ маршрут. В случае $K=3$ легко нарисовать схему автобусных маршрутов, содержащую ровно $K(K+1)=12$ маршрутов. На рис.9 показана такая схема, содержащая 12 маршрутов: 8 прямолинейных и 4 криволинейных (остановки на рис.9 показаны кружочками).

Задача № 3. Стекло имеет форму квадрата с площадью 1. На обеих сторонах этого стекла нарисованы карты, по 10 стран на каждой карте. Страны на одной стороне стекла закреплены десятью различными красками. Требуется закрасить страны на противоположной стороне теми же десятью красками так, чтобы:

а) разные страны были закрашены разными красками;

б) общая площадь участков стекла, окрашенных с обеих сторон в один цвет, была не меньше 0,1. Всегда ли это можно сделать?

Решение. Докажем, что это можно сделать всегда. Произвольным образом занумеруем страны на одной стороне стекла цифрами от 1 до 10, а на противоположной — цифрами от 11 до 20. Обозначим через S_k^m сумму площадей k-ой и m-ой стран (здесь $1 \le k \le 10$, $11 \le m \le 20$). Выпишем числа S_k^m в виде следующей таблицы:

$$
\begin{array}{cccccc}
S_1^{11} & S_2^{12} & S_3^{13} & \dots & S_9^{19} & S_{10}^{20} \\
S_1^{12} & S_2^{13} & S_3^{14} & \dots & S_9^{20} & S_{10}^{11} \\
S_1^{13} & S_2^{14} & S_3^{15} & \dots & S_9^{11} & S_{10}^{12} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
S_1^{19} & S_2^{20} & S_3^{11} & \dots & S_9^{17} & S_{10}^{18} \\
S_1^{20} & S_2^{11} & S_3^{12} & \dots & S_9^{18} & S_{10}^{19}
\end{array}
$$

Сумма всех чисел таблицы равна I (почему?), поэтому найдется строка, сумма чисел в которой не меньше 0,I. Пусть это будет, например, вторая строка. Окрасим I2-ю страну в тот же цвет, что и I-ю, I3-ю - в цвет 2-ой, I4-ю - в цвет 3-ей , и т.д. 20-ую - в цвет 9-й и, наконец II-ю - в цвет I0-ой. Тогда общая площадь участков стекла, окрашенных с обеих сторон в один цвет, будет равна $S_1^{12}+S_2^{13}+S_3^{14}+\dots+S_9^{20}+S_{10}^{11}$, то-есть равна сумме элементов второй строки таблицы и, следовательно, не меньше 0,I.

Задача № 4. В некоторой точке прямой находится частица. За I секунду она делится пополам и половинки расходятся в противоположные стороны на расстояние I от прежнего положения. За следующую секунду образовавшиеся частицы снова делятся пополам и половинки расходятся в противоположные стороны на расстояние I от прежних положений. Сталкиваясь, любые две частицы уничтожаются, так что, например, через две секунды останется только две частицы. Сколько частиц останется через I29 секунд?

Решение. Положение частицы на прямой можно задать числом x, равным расстоянию частицы от начального положения $x_0=0$, взятому со знаком "плюс", если частица находится правее x_0 и со знаком "минус" – если левее. Тогда процесс деления частиц можно изобразить в виде схемы (см. рис. 10, где показано, что получится в моменты t =0,I,2.3 и 4 сек.).

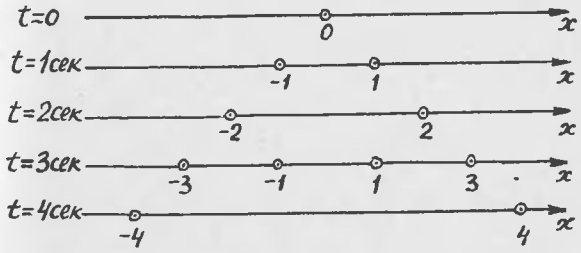


Рис 10.

Докажем, что через 2^n-1 секунду будет 2^n частиц, расположенных в ряд на расстоянии 2 друг от друга, причем крайние частицы будут находиться на расстоянии 2^n-1 от начального положения.

Доказательство проведем по индукции. Справедливость доказываемого при $n=1$ и $n=2$ ясна из рис. Пусть это утверждение уже доказано при $n=k$. Докажем его для $n=k+1$. Как следует из предположения индукции, в момент $t=2^k$ сек останется 2 частицы на расстоянии 2^n от начального положения.

Потом в течение времени ($2^K - 1$) сек. "потомство" первой частицы никак не будет взаимодействовать с "потомством" второй и поэтому, как следует из предположения индукции, в момент $t = 2^K + 2^K - 1 = 2 \cdot 2^K - 1$ сек. образуется $2 \cdot 2^K = 2^{K+1}$ частиц, расположенных в ряд на расстоянии 2 друг от друга.

Из доказанного следует, что через $127 = 2^7 - 1$ сек. будет 2^7 частиц, через 128 сек будет 2 частицы, через 129 сек станет 4 частицы.

Задача № 5. Доказать, что не существует таких простых чисел a, b, c и d, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abcd + 4$.

Решение. Равенство не может выполняться, если среди чисел a, b, c, d есть одно нечетное, или три нечетных, или если все четыре числа нечетные, так как в этих случаях числа $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ и $abcd + 4$ имеют различную четность.

Если числа a, b, c и d четные, то-есть равны 2, то $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16$, а $abcd + 4 = 20$; равенства нет.

Рассмотрим, наконец, случай, когда два из чисел a, b, c, d четные и два нечетные. Пусть, например, a и b - нечетные, а $c = d = 2$. В этом случае левая часть равенства будет $a^2 + b^2 + 8$, а правая $4ab + 4$. Из приведенной в решении задачи 9 леммы 2 следует, что $a^2 + b^2 - 2$ делится на 4 (и на 8), значит $a^2 + b^2$ не делится на 4 и $a^2 + b^2 + 8$ не делится на 4. Значит, и в этом случае $a^2 + b^2 + 8 \neq 4ab + 4$.

Задача № 6. Лотерейные билеты имеют номера от 000001 до 999 999. Номер называется "счастливым", если сумма трех первых его цифр равна сумме трех последних. Доказать, что сумма всех "счастливых" номеров делится на 13.

Решение. Заметим, что если номер $\overline{abcdef}$ x) "счастливый", то-есть, $a+b+c=d+e+f$, то и номер $999\,999-\overline{abcdef}$ тоже "счастливый", так как сумма первых трех его цифр $27-(a+b+c)$ равна сумме трех последних $27-(d+e+f)$.

Все "счастливые" номера разобьем на пары: каждый "счастливый" номер $a<500\,000$ объединим в пару со "счастливым" номером $999\,999-a$, который, очевидно, больше 500 000. Сумма номеров, принадлежащих одной паре, равна $999\,999 = 999\cdot77\cdot13$ и, следовательно, делится на 13. Значит, сумма всех "счастливых" номеров тоже делится на 13.

Задача № 7. Дан шар и точка A на его поверхности. Построить систему окружностей, все точки которых принадлежат шару, так, чтобы через каждую точку шара, кроме точки A, проходила одна и только одна окружность этой системы.

Решение. Пусть B – точка, диаметрально противоположная A (рис.11).

x) $\overline{abcdef} = a\cdot10^5+b\cdot10^4+c\cdot10^3+d\cdot10^2+e\cdot10+f$

Проведем прямую MN, касающуюся шара в точке B.

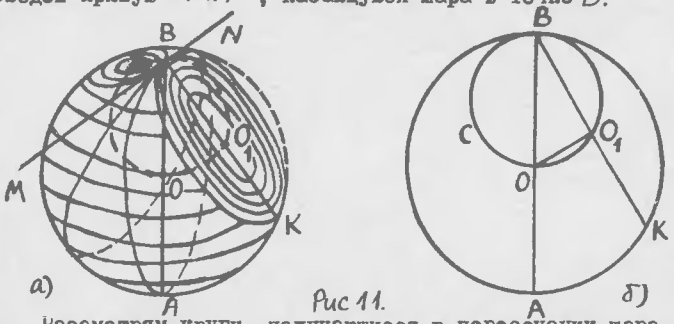


Рис 11.

Рассмотрим круги, получающиеся в пересечении шара с плоскостями, проходящими через MN. Центры этих кругов лежат на окружности C, касающейся поверхности шара изнутри в точке B. Докажем это.

С этой целью рассмотрим сечение шара плоскостью, проходящей через точки A и B перпендикулярно MN. Отрезок BK представляет собой диаметр одного из рассматриваемых кругов, точка O_1 – центр этого круга, поэтому $BO_1 = O_1K$. Центр шара O является серединой отрезка AB. Отрезок диаметра OO_1 проходит через середину O_1 хорды BK, поэтому $OO_1 \perp BK$. Следовательно, точка O_1 лежит на окружности C, построенной на отрезке BO, как на диаметре.

Отнесем к искомой системе все окружности, лежащие внутри рассмотренных сечений, причем центры этих окружностей совпадают с центрами соответствующих сечений; окружность C и все параллели, то-есть сечения поверхности шара плоскостями, перпендикулярными AB.

Легко видеть, что построенная система удовлетворяет условиям задачи.

Задача № 8. Доказать, что число, десятичная запись которого состоит из 3^n единиц, делится на 3^n.

Решение. Доказательство проведем методом математической индукции. Число III на 3 делится. Допустим, что наше утверждение уже доказано для $n=k$, и докажем его для $n=k+1$.

Представим число $\underbrace{III\ldots I}_{3^{k+1}}$ в виде:

$$\underbrace{111\ldots1}_{3^k\ раз}\cdot\underbrace{1000\cdots01}_{(3^k-1)\ раз}\underbrace{000\ldots01}_{(3^k-1)\ раз}$$

Первый сомножитель делится на 3^k по предположению индукции, второй сомножитель делится на 3, так как сумма его цифр равна 3, значит, произведение делится на 3^{k+1}

Задача № 9. Имеется целое тысячезначное число a, все цифры которого, за исключением одной, пятерки. Доказать, что не существует такого целого числа b, что $b^2=a$, то-есть a не является полным квадратом.

Решение. Сначала докажем следующие 2 леммы:

Лемма I. Если число b^2 делится на простое число p, то оно делится и на p^2.

Разложим число b на простые множители: $b=p_1^m\cdot p_2^n\cdots p_s^r$

Разложение на простые множители числа b^2 имеет вид:

$$b^2=p_1^{2m}\cdot p_2^{2n}\cdots p_s^{2r}.$$

3-1357

Пользуясь теоремой о единственности такого разложения,[x] получаем отсюда утверждение леммы.

Лемма 2. Если b нечетно, то b^2-1 делится на 8. Числа $b-1$ и $b+1$ – два последовательных четных числа, значит, одно из них кратно 4. Поэтому любое нечетное число b записывается в виде $b=4n+1$ или в виде $b=4n-1$, где n – целое. В первом случае $b^2=16n^2+8n+1$, во втором $b^2=16n^2-8n+1$. Лемма 2 доказана.

Последней цифрой десятичной записи полного квадрата может быть лишь 0, I, 4, 5, 6 или 9. Пусть десятичная запись a имеет вид $55\ldots5N$, где цифра $N\neq5$. Если N равно 0 или 4, то не выполняется лемма I для $p=2$, при $N=6$ лемма I не выполняется при $p=3$, если N равно I или 9, то не выполняется лемма 2. В этих случаях $a\neq b^2$.

Если, наконец, последняя цифра числа a пятерка и $a=b^2$, то, как видно из доказательства леммы I, последняя цифра числа b тоже 5. Так как $b^2=(10n+5)^2=100n^2+100n+25$, то десятичная запись b^2 оканчивается цифрами 25. Следовательно, должно быть $a=\underbrace{5\ldots5}_{998\ раз}25$. В этом случае, однако, не выполняется лемма 2, значит, и здесь $a\neq b^2$.

---

x) *см. сноску на стр. 45 Выпуска XI.*

Задача № 10. Дан круг и две точки внутри него. Доказать, что через эти точки можно провести окружность так, чтобы она лежала внутри данного круга.

Решение. Пусть O – центр данного круга, A и B – данные точки, причем $OA \geq OB$. Проведем радиусом, равным OA, окружность C с центром в точке O.

Если $OA = OB$, то эта окружность удовлетворяет требованиям задачи.

Если $OA > OB$, то восставим перпендикуляр из

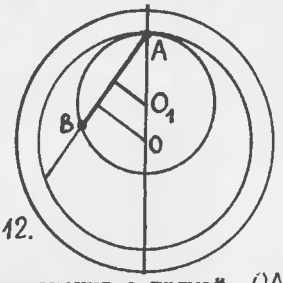


Рис 12.

середины AB до пересечения с прямой OA в точке O_1. Легко доказать (см. рис. 12), что точка O_1 лежит между A и O. Проведем окружность с центром в точке O_1 радиусом, равным O_1A. Эта окружность касается окружности C внутренним образом, и, следовательно, удовлетворяет требованиям задачи.

Задача № 11. Найти все простые числа p такие, что $(8p^2+1)$ простое.

Решение. Любое простое число p, отличное от 3, не кратно 3 и, значит, может быть представлено в виде $p = 3n+1$ или в виде $3n-1$, где n – целое.

В первом случае $8p^2+1=72n^2+48n+9$,

во втором $8p^2+1=72n^2-48n+9$, откуда видно, что если $p\neq 3$, то $8p^2+1$ кратно трем и, очевидно, больше трех, значит не может быть простым.

Если $p=3$, то $8p^2+1=73$ – простое число. Следовательно, $p=3$ есть единственное простое число, удовлетворяющее условию.

Задача № 12. Пусть $p=k^n$, где k и n – натуральные числа ($n>1$). Доказать, что p есть сумма k последовательных нечетных чисел.

Решение. Задача сводится, очевидно, к нахождению нечетного числа x, удовлетворяющего уравнению:

$$x+(x+2)+(x+4)+\cdots+(x+2k-2)=k^n$$

Левая часть уравнения представляет собой сумму арифметической прогрессии, поэтому, пользуясь формулой суммы k первых членов арифметической прогрессии, мы можем левую часть уравнения записать в виде:

$$\frac{[2x+2(k-1)]k}{2}=(x+k-1)k.$$

Решая уравнение $(x+k-1)k=k^n$ относительно x, найдем, что $x=k^{n-1}-k+1$. Числа k и k^{n-1} имеют одинаковую четность, поэтому $x=k^{n-1}-k+1$ – нечетное число.

Задача № 13. Точка O – центр квадрата $ABCD$. Найти геометрическое место точек N таких, что отрезок ON можно накрыть кругом, целиком лежащим внутри квадрата $ABCD$.

Решение. Проведем через O окружности, касающиеся смежных сторон квадрата в точках $P_1, P_2, \ldots, P_8$. (рис. 13).

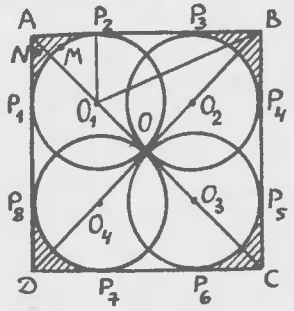


Рис 13.

Центры этих окружностей – точки O_1, O_2, O_3 и O_4.

Из равенства ΔBO_1P_2 и ΔBO_1O следует, что O_1 лежит на пересечении AC с биссектрисой $\angle ABD$. Аналогично строятся точки O_2, O_3 и O_4.

Легко видеть, что точки внутри фигуры $P_1P_2 \ldots P_8$, показанной на рис. жирной линией, принадлежат искомому геометрическому месту. Докажем, что никакие другие точки ему не принадлежат.

Пусть, например, точка N лежит внутри заштрихованной на рис. области P_1AP_2 . Всякий круг K , лежащий внутри квадрата и накрывающий N , либо не содер-

3х-1357

жит внутренних точек области $P_1P_2 \ldots P_8$ и значит, не накрывает точки O, либо окружность C круга K пересекает дугу P_1MP_2 в двух точках. В этом случае окружность C не имеет общих точек с дугой P_1OP_2, так как две различные окружности не могут иметь более двух общих точек. Так как точки P_1 и P_2 дуги P_1OP_2 лежат вне круга K, то и точка O не может накрываться кругом K.

Аналогично доказывается, что точки дуг P_1P_2, P_3P_4, P_5P_6 и P_7P_8, такие как показанная на рис. точка M, не принадлежат искомому геометрическому месту.

Задача № I4. Ученик седьмого класса Петя Иванов придумал новую теорему. Если n – натуральное число, то n^2-n+41 – простое. Сможет ли Петя доказать свою теорему?

Решение. Эта теорема неверна. Действительно, при $n=41k$, где k – целое, число n^2-n+41 делится на 4I.

Задача № I5. В каждой вершине треугольника написано некоторое число, меньшее I000 000, причем сумма всех этих чисел равна 3000. Каждое число заменяется на среднее арифметическое чисел, стоящих в соседних вершинах, и эта операция повторяется 30 раз. Доказать, что после этого каждое из чисел станет меньше, чем I00I.

Решение. Обозначим числа, написанные в вершинах треугольника, через A, B и C. Каждое из этих чисел не превосходит 1000000, а их сумма равна 3000.

Рассмотрим другой треугольник, в вершинах которого написаны числа $a = A-1000$, $b = B-1000$, $c = C - 1000$. Эти числа не превосходят 999 000, а их сумма равна нулю.

Будем с числами в вершинах второго треугольника совершать такие же операции, как и с числами в вершинах первого треугольника. Заметим, что $a_1 = \frac{b+c}{2} = \frac{B+C}{2} - 1000$, $b_1 = \frac{a+c}{2} = \frac{A+C}{2} - 1000$ и $c_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{A+B}{2} - 1000$, откуда следует, что в вершинах второго треугольника каждый раз будут получаться числа, на 1000 меньше, чем соответствующие числа в вершинах первого треугольника.

С другой стороны, $a_1 = \frac{b+c}{2} = -\frac{a}{2}$ точно так же $b_1 = -\frac{b}{2}$ и $c_1 = -\frac{c}{2}$, кроме того, $a_1 + b_1 + c_1 = 0$. Отсюда вытекает, что после первой операции в вершинах второго треугольника стоят числа $-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}$, после второй - числа $\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}$, после третьей $-\frac{a}{8}, -\frac{b}{8}, -\frac{c}{8}$ и т.д., а после тридцатой - числа $\frac{a}{2^{30}}$, $\frac{b}{2^{30}}$, $\frac{c}{2^{30}}$ каждое из которых не превосходит 1, так как $999\,000 < 2^{30}$

Значит, в вершинах первого треугольника после операции будут стоять числа $\frac{a}{2^{30}} + 1000$, $\frac{b}{2^{30}} + 1000$, $\frac{c}{2^{30}} + 1000$, не превышающие 1001.

Задача № I6. Доказать, что каждая правильная дробь $\frac{a}{b}$ может быть представлена в виде

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{1}{q_1 \cdots q_n},$$

где $q_1, q_2, \cdots, q_n$ – целые числа, большие 1.

Решение. См. сб. "Математическая школа", выпуск УШ, стр. I2, I3.

Задача № I7. В каждой из клеток бесконечной шахматной доски написано некоторое число, причем в клетках, расположенных на одной вертикали, написаны одинаковые числа и каждое из чисел равно сумме чисел, написанных в 4 соседних клетках – правой, левой, верхней и нижней. Описать все возможные расположения чисел, удовлетворяющих этим условиям.

Решение. Обозначим числа, стоящие в каких-нибудь двух соседних клетках, через a и b (рис.14). Так как $b = a + b + b + x$, то $x = -a - b$, аналогично $y = -b - x = a$, $z = -x - y = b$, $u = -y - z = -a - b$. Точно так же $t = -a - b$.

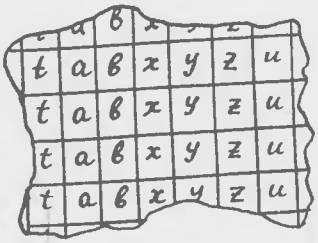


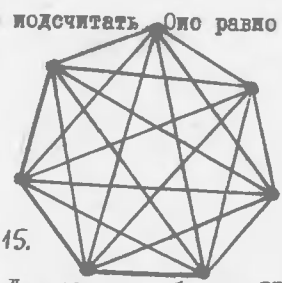
Рис 14.

Отсюда видно, что на каждой горизонтали числа чередуются следующим образом: $\ldots, a, в, -a-в, a, в, -a-в, \ldots$

Расположение чисел в клетках однозначно определяется, таким образом, числами a и $в$, стоящими в двух соседних вертикалях. Меняя числа a и $в$, можно получить все возможные расположения, удовлетворяющие условиям задачи.

Задача № 18. Дано 7 точек на плоскости, причем никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Каждая пара точек соединяется отрезком. Какое наибольшее и наименьшее число точек пересечения могут иметь все эти отрезки?

Решение. Если данные точки представляют собой вершины правильного семиугольника, то число точек пересечения легко подсчитать. Оно равно 35.



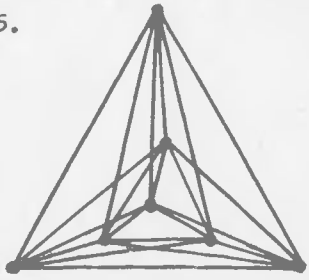


Рис 15.

Докажем, что больше 35 точек быть не может. Легко доказать, что если бы в условии фигурировали не 7, а 4 точки, то максимальное число точек пересечения было бы равно I. Далее, каждой точке пересечения соответствуют (по крайней мере) 4 из данных 7 точек - концы 2-х отрезков, пересекающихся в данной точке.

Мы видим, что число точек пересечения не превосходит числа спооообов, которыми можно выбрать 4 точки из данных семи. Непосредственный подсчет показывает, что оно равно 35.

Для нахождения этого числа можно также воспользоваться комбинаторикой (см., например, Киселёв "Алгебра", ч. П), Оно равно $C_7^4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35.$

Если данные 7 точек расположены, как показано на рис. 15 , то число точек пересечения - 9.

Доказательство того, что число точек пересечения не может быть меньше 9, не содержалось ни в одной из работ. Предоставляем его читателю.

ИТОГИ КОНКУРСА В.М.Ш. по 9-10 КЛАССАМ

(I - 2 - 3 циклы)

Б.ГРИГОРЬЕВ

Для решения на конкурсе 9-10 классов было предложено 20 задач разной степени трудности. Наиболее трудными оказались задачи №№ I,5,8,10,15,17,18 . Некоторые из этих задач не были решены ни одним из участников конкурса.

По итогам I-2 циклов премии получили:

I премия: Шокуров Вячеслав 10 кл. шк. № 2
Шокуров Александр 8 кл. шк. № 2

II премия : Фомичев В. 10 кл. шк. № 7
Ившин В.

Ниже приводятся краткие решения конкуроных задач.

Задача № I. Сеть автобусных маршрутов в городе Лиссе устроена так, что :

а) на каждом маршруте имеется K остановок,

б) любые два маршрута либо вовсе не имеют общих остановок, либо имеют только одну общую остановку. Какое наибольшее число маршрутов может быть в этом городе, если известно, что имеетсн всего K^2 различных остановок (9- 10 классы решают задачу при $K=5$)?

Решение. Заметим, что если бы некоторан остановка A лежала на $K+2$ (или больше) маршрутах, то т.к. по условию на каждом маршруте $K-1$ остановка, кроме A, и все они различны, то общее число остановок на этих маршрутах было бы

равно $(K+2)(K-1)+1 = K^2+K-1 > K^2$ (т.к. $K \geq 2$), что невозможно по условию. Отсюда следует, что любая остановка лежит не более чем на $K+1$ маршруте.

Если в городе Лиссе N маршрутов, то каждая из $N \cdot K$ остановок считается не более $K+1$ раза и потому

$$\frac{N \cdot K}{K+1} \leqslant K^2 \quad , \text{ откуда } N \leqslant K(K+1).$$

Докажем теперь, что при $K=5$ действительно можно построить $5 \cdot 6 = 30$ маршрутов с соблюдением условий задачи. Это можно сделать, например, так, как указано на рис. 30 стр. 68.

Задача № 2. Стекло имеет форму квадрата с площадью I, на обеих сторонах этого стекла нарисованы карты, по IO стран на каждой карте. Страны на одной стороне стекла закрашены IO-ю различными красками. Требуется закрасить страны на противоположной стороне теми же десятью красками так, чтобы:

а) разные страны были закрашены разными краоками,

б) общая площадь участков стекла, закрашенных с обеих сторон одной и той же краской, была не меньше 0,I . Всегда ли это можно сделать ?

Решение. Будем всевозможными способами закрашивать противоположную сторону стекла, заботясь лишь о том, чтобы было выполнено условие а). Каждый раз будем отмечать общую площадь участков квадрата, закрашенных с обеих сторон одной и той же краской.

Подсчитаем сумму S всех этих общих площадей. Для этого дополнительно разобьем страны нижней стороны стекла по

линиям, нанесенным на верхней стороне, на части с площадями $S_1, \dots, S_n$. Очевидно:

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n = 1 .$$

Существует ровно $9!$ способов закраски, при которых S_1 закрашена с обеих сторон в один и тот же цвет. Поэтому в S число S_1 войдет с коэффициентом $9!$. То же можно сказать и об $S_2, \dots, S_n$. Следовательно,

$$S = 9! \cdot S_1 + 9! \cdot S_2 + \dots + 9! \cdot S_n = 9! (S_1 + S_2 + \dots + S_n) = 9!$$

Но само S состоит из $10!$ слагаемых. Значит хотя бы одно из них не меньше, чем $\frac{9!}{10!} = 0{,}1$, что и требовалось доказать.

Задача № 3. Торт имеет форму правильного семиугольника. На каждой стороне семиугольника взято по точке и торт разрезан по прямым, соединяющим последовательно эти точки. При каком выборе точек наименьший из отрезанных треугольных кусков будет иметь максимальную площадь ?

Решение. Площадь треугольника, отрезанного у вершины A_i, обозначим через S_i (см. рис 16). Если не все эти треугольники имеют равные площади, то найдутся два соседних треугольника (пусть, например, S_1 и S_2) такие, что

$$S_1 > S_2 .$$

Сдвинув точку B_1 влево, мы увеличим площадь меньшего треугольника S_2 и уменьшим площадь большего треугольника S_1. Проделав такую операцию несколько раз, мы увеличим площадь того треугольника, который был наименьшим вначе-

ле u, если эти изменения были достаточно малыми, он и останется наименьшим. Получим, что *если* наименьший треугольник имеет наибольшую возможную площадь, то

$$S_1 = S_2 = \cdots = S_7 . \qquad (1).$$

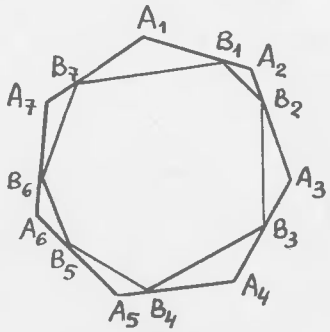


Рис 16.

Обозначим длину отрезка $A_i B_i$ через α_i и будем считать, что сторона семиугольника равна единице. Тогда:

$$S_i = \frac{1}{2}\alpha_i (1-\alpha_{i-1}) \sin\frac{5\pi}{7}.$$

Поэтому равенство (I) можно переписать так:

$$\alpha_1(1-\alpha_7) = \alpha_2(1-\alpha_1) = \cdots = \alpha_7(1-\alpha_6). \qquad (2)$$

Если $\alpha_1 > \alpha_2$, то $1-\alpha_7 < 1-\alpha_1$, т.е. $\alpha_7 > \alpha_1$, но тогда $1-\alpha_6 < 1-\alpha_7$, т.е. $\alpha_6 > \alpha_7$ и т.д., получаем: $\alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_7 < \alpha_6 < \alpha_5 < \alpha_4 < \alpha_3 < \alpha_2$, что невозможно. Аналогично к противоречию приводит и предположение $\alpha_1 < \alpha_2$.

Итак, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_7 = \alpha$ и потому величина

$$S = \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\sin\frac{5\pi}{7}$$

достигает наибольшего значения при $\alpha = \frac{1}{2}$. Итак, точки

ледует выбрать в серединах сторон семиугольника.

Задача № 4. Решить уравнение: $x = 1 - a(1 - ax^2)^2$ при $a = 1966$.

Решение. (Сравните с решением задачи № 4 для 8 класса) Очевидно, что если $x_0 = 1 - ax_0^2$, то x_0 – удовлетворяет и нашему уравнению. Можно, поэтому, рассчитывать, что многочлен $1 - a(1 - ax^2)^2 - x$ делится на $1 - ax^2 - x$.

Выполняя деление, находим, что

$$1 - a(1 - ax^2)^2 - x = (1 - ax^2 - x)(a^2x^2 - ax + 1 - a),$$

поэтому наше уравнение сводится к двум квадратным:

$$ax^2 + x - 1 = 0,$$
$$ax^2 - ax + 1 - a = 0,$$

корни которых легко находятся.

Задача № 5. Обозначим через $\rho_k(M)$ расстояние точки M от вершины A_k равностороннего треугольника $A_1A_2A_3$. Пусть a_1, a_2, a_3 – произвольные положительные числа. Поотроить точку M_0 , в которой выражение $a_1\rho_1(M) + a_2\rho_2(M) + a_3\rho_3(M)$ принимает наименьшее значение.

Решение. Предположим, что нам удалось указать такую точку M_0 , что для векторов z_1, z_2, z_3 , выходящих из точки M_0 в направлении вершин треугольника и имеющих длины a_1, a_2, a_3 соответственно, выполнено равенство (см. рис. 24 x)

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0. \quad (1)$$

Покажем, что тогда в точке M_0 выражение

$$\rho(M) = a_1\rho_1(M) + a_2\rho_2(M) + a_3\rho_3(M)$$

x) см. рис. 24 на стр. 58.

достигает минимума. Будем считать, что треугольник $A_1A_2A_3$ лежит на комплексной плоскости и точка M_0 совпадает с началом координат. Тогда, обозначая через $\bar{z}$ число, комплексно-сопряженное с z, имеем:

$$\rho(M)=a_1|M-A_1|+a_2|M-A_2|+a_3|M-A_3|=|\bar{z}_1||M-A_1|+$$
$$+|\bar{z}_2||M-A_2|+|\bar{z}_3||M-A_3|=|\bar{z}_1M-\bar{z}_1A_1|+$$
$$+|\bar{z}_2M-\bar{z}_2A_2|+|\bar{z}_3M-\bar{z}_3A_3|\geq|\bar{z}_1M-\bar{z}_1A_1+\bar{z}_2M-$$
$$-\bar{z}_2A_2+\bar{z}_3M-\bar{z}_3A_3|=|(\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3)M-\bar{z}_1A_1-\bar{z}_2A_2-$$
$$-\bar{z}_3A_3|=|\bar{z}_1A_1+\bar{z}_2A_2+\bar{z}_3A_3|=|\bar{z}_1A_1|+|\bar{z}_2A_2|+|\bar{z}_3A_3|=$$
$$=a_1|A_1|+a_2|A_2|+a_3|A_3|=\rho(0).$$

(здесь использовано, что $\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3=0$ и что $\bar{z}_i\cdot A_i$ - положительные дейотвительные числа).

Легко видеть, что при $M\neq M_0$ имеем строгое неравенство $\rho(M)>\rho(M_0)$; осталось посмотреть, всегда ли можно выбрать точку M_0, чтобы для нее выполнялось (I). Как видно из рис. 24, для этого необходимо, чтобы из отрезков a_1,a_2,a_3 можно было сложить треугольник. Обратно, если из отрезков a_1,a_2,a_3 можно сложить треугольник, то через углы этого треугольника легко можно выразить углы между векторами z_1,z_2,z_3, а зная их, можно построить и точку M_0.

Разберем теперь случай, когда из отрезков a_1,a_2,a_3 нельзя сложить треугольник. Пусть, например, $a_1\geq a_2+a_3$. Покажем, что в этом случае $\rho(M)$ достигает минимума при $M=A$. Действительно, $\rho(M)=a_1|M-A_1|+a_2|M-A_2|+$
$$+a_3|M-A_3|\geq(a_2+a_3)|M-A_1|+a_2|M-A_2|+a_3|M-A_3|=$$
$$=a_2(|M-A_2|+|M-A_1|)+a_3(|M-A_3|+|M-A_1|)\geq$$
$$\geq a_2|M-A_2|+a_3|M-A_3|=\rho(A_1).$$

и т.д.

Замечание. При решении мы не использовали того, что $A_1A_2A_3$-равносторонний треугольник.

Задача № 6. На сторонах $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ выпуклого четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ выбраны точки B_1, B_2, B_3, B_4. При этом прямые A_1A_3, B_1B_2, B_4B_3 пересекаются в точке P_1, а прямые A_2A_4, B_1B_4, B_2B_3 пересекаются в точке P_2. Доказать, что произведение длин отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 равно произведению длин отрезков $B_1A_2, B_2A_3, B_3A_4, B_4A_1$.

Решение. При решении этой задачи удобно воспользоваться следующим утверждением, которое известно как теорема Менелая.

Теорема. Пусть стороны (или продолжения сторон) треугольника $A_1A_2A_3$ пересечены прямой в точках B_1, B_2, B_3 (см.рис. 18).

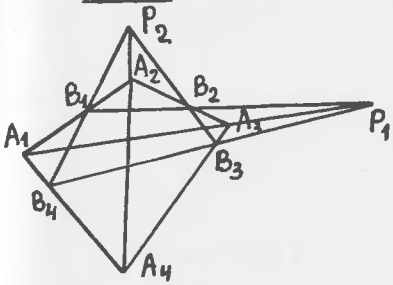


Рис 17.

Тогда

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_1}=1 \qquad (I)$$

Доказательство этой теоремы, например, в книге М.Б.Балка "Геометрические приложения понятия о центре тяжести".

Применим теорему Менелая к треугольнику $A_1A_2A_3$ и прямой B_1P_1, а затем к треугольнику $A_1A_3A_4$ и прямой B_4P_1 (рис.17):

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3P_1}{P_1A_1}=1 \text{ и } \frac{A_1B_4}{B_4A_4}\cdot\frac{A_4B_3}{B_3A_3}\cdot\frac{A_3P_1}{P_1A_1}=1.$$

1/2 4-1357

Если первое равенство разделить на второе, то получится:

$$\frac{A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot A_3B_3 \cdot A_4B_4}{B_1B_2 \cdot B_2A_3 \cdot B_3A_4 \cdot B_4A_1} = 1,$$

откуда и вытекает утверждение задачи.

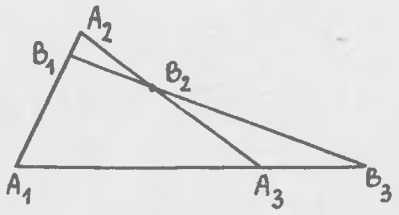


Рис 18.

Заметим, что условие задачи о том, что прямые A_2A_4, B_1B_4, B_2B_3 пересекаются в точке P_2 излишне. Используя теорему Менелая, легко показать, что оно есть следствие первого условия.

Задача № 7. Доказать, что

$$\frac{1}{44} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{999}{1000} < \frac{1}{36}.$$

Решение. Приведем решение, принадлежащее ученикам IO кл. 7-й школы г. Москвы В.Фомичеву и В.Ившину.

Обозначим произведение $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{999}{1000}$ через A. Пусть $B = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{998}{999}$. Очевидно, $B > A$. С другой стороны, $AB = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{3}{4000}$. Поэтому

$$A < \sqrt{AB} = \sqrt{\frac{3}{4000}} < \frac{1}{36}.$$

Пусть теперь $B' = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{998}{999}$; очевидно, $B' > A$. С другой стороны, $AB' = \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{9}{16000}$,

откуда: $A > \sqrt{AB'} = \sqrt{\frac{9}{16000}} > \frac{1}{44}$.

Задача № 8. Дан треугольник ABC и точка O внутри него. Доказать, что хотя бы один из углов $\angle OAB, \angle OBC$, $\angle OCA$ не больше 30^0.

Решение. При решении этой задачи удобно воспользоваться следующей леммой.

Лемма. Для любых углов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$,

$$\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdots \sin\alpha_n \le \left(\sin\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{n}\right)^n.$$

Докажем, что неравенство верно при $n=2$, т.е. что

$$\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \le \sin^2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}. \qquad (I)$$

Так как $\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{2}$, то неравенство (I) можно переписать так:

$$2\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \le 1 - \cos(\alpha_1+\alpha_2) = 1 - \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2$$

или

$$\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \le 1.$$

Это неравенство очевидно, т.к. выражение слева равно $\cos(\alpha_1-\alpha_2)$ (Проверьте сами, что все рассуждения можно провести в обратном порядке).

Далее лемма доказывается методом полной математической индукции также, например, как неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом n чисел.

Переходим к задаче: имеем

$$\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \sin\alpha_3 = \frac{OR}{OA} \cdot \frac{OQ}{OC} \cdot \frac{OP}{OB} =$$

$$= \frac{OP}{OA} \cdot \frac{OR}{OC} \cdot \frac{OQ}{OB} = \sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\beta_3.$$

(см.рис.19)

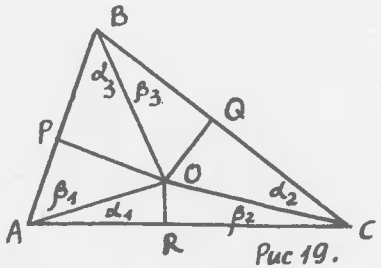


Рис 19.

Но $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta_1+\beta_2+\beta_3 = 180^\circ$, поэтому

$$\sin^2\alpha_1 \cdot \sin^2\alpha_2 \cdot \sin^2\alpha_3 = \sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \sin\alpha_3 \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\beta_3 \le \left(\sin\frac{180^\circ}{6}\right)^6 = \frac{1}{2^6}.$$

Значит, $\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \sin\alpha_3 \le \frac{1}{8}$ и поэтому хоть одно из чисел $\sin\alpha_1, \sin\alpha_2, \sin\alpha_3$ не больше $\frac{1}{2}$, что и означает, что соответствующий угол не больше 30°.

Задача № 9. Диаметром пространственного тела называется расстояние между двумя самыми удаленными друг от друга точками этого тела. Имеется выпуклое тело такое, что через каждую точку его границы можно провести единственную плоскость, не имеющую с телом других точек. Доказать, что такое тело можно разбить на 4 куска меньшего диаметра.

Решение. см. в книге В.Г.Болтянского и И.Ц.Гохберга "Теоремы и задачи комбинаторной геометрии".

Задача № 10. В вершинах правильного n-угольника написаны целые числа $a_1, \dots, a_n$, причем, $a_1 + \dots + a_n = 0$. Перевозкой называется вычитание единицы из числа, стоящего в некоторой вершине и прибавление ее к числу, стоящему у одной из соседних вершин. Какое минимальное число перевозок нужно сделать, чтобы все числа, стоящие у вершин многоугольника, стали равны нулю?

Решение. Условимся, что перевозка некоторого положительного числа, например, 5 из A в B означает 5 перевозок из A в B, а перевозка некоторого отрицательного числа, например, -6 из A в B, означает 6 перевозок из B в A.

Пусть из первой вершины во вторую перевезли число p_1 из 2-ой в 3-ю p_2, ... из n-ой в 1-ю p_n.

Так как в результате перевозок числа во всех вершинах стали равны 0, то

$$p_{n-1} = p_n - a_n,$$
$$p_{n-2} = p_{n-1} - a_{n-1} = p_n - a_n - a_{n-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$p_1 = p_2 - a_2 = p_n - a_n - a_{n-1} - \dots - a_n.$$

Значит, если известно p_n, то остальные перевозки однозначно определяются.

Общее количество перевозок, очевидно, равно:

$$T = |p_n| + |p_{n-1}| + \dots + |p_1| = |p_n| + |p_n - a_n| +$$
$$+ |p_n - a_n - a_{n-1}| + \dots + |p_n - a_n - a_{n-1} - \dots - a_2|.$$

Нам нужно подобрать p_n так, чтобы это выражение было минимальным.

Рассмотрим числа: $0, a_n, a_n+a_{n-1}, \dots, a_n+a_{n-1}+\dots+a_2$ и расположим их в порядке возрастания $c_1 \le c_2 \le c_3 \le \dots \le c_n$. Нарисуем график функции $T(x)=|x-c_1|+|x-c_2|+\dots+|x-c_n|$. (см.рис.20).

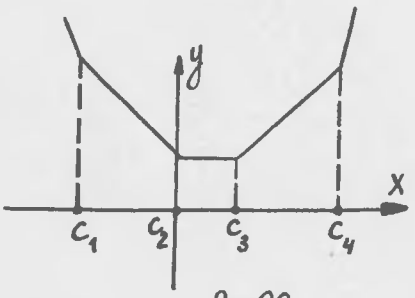


Рис 20.

Легко заметить, что наименьшее значение $T(x)$ достигает при $x = c_{\frac{n+1}{2}}$ при n – нечетном и на отрезке $c_{\frac{n}{2}} \le x \le c_{\frac{n}{2}+1}$ при n – четном (на рис. изображен график $T(x)$ при $n=4$); о построении таких графиков можно прочитать в книге Г.Е.Шилова " Как строить графики " .

Заметим, что если мы выбираем $p_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_k$, то $p_{k-1} = p_n - a_n - \dots - a_k = 0$, откуда вытекает следующее правило для наилучшего способа перевозок: начиная с некоторой вершины, составляем суммы:

$$0,\ a_n+a_{n-1},\ \dots,\ a_n+\dots+a_2.$$

Из этих сумм выбираем среднюю по величине. Пусть она соот-

ветствует вершине A_k. Тогда из A_{k-1} в A_k ничего везти не надо. Содержимое A_k надо перевезти в A_{k+1}, что получится после этого в A_{k+1}, перевезти в A_{k+2} и так далее.

Задача № II. На каждой клетке бесконечной шахматной доски со сторсной клетки I ом. стоит по фишке. Фишки снимают с доски и расставляют в новом порядке. Оказалось, что:

I) две фишки, стоявшие ранее в соседних клетках, снова оказались в соседних клетках,

2) ни одна фишка не сдвинулась от своего начального положения более, чем на I00 ом.

Как оказались расставлены фишки после перестановки (найти все возможные расположения)?

Примечание: соседними считаются клетки, граничащие по некоторой линии.

Решение. Докажем сначала, что если 2 фишки Φ_1 и Φ_2 стояли друг за другом на некоторой диагонали (рис 21а), то и после новой расстановки они окажутся в таком же взаимном

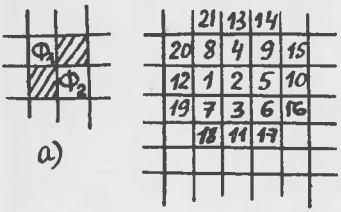


Рис 21.

расположении. Действительно, указанное расположение фишек однозначно характеризуются тем, что имеются ровно 2 поля, которые являются соседними, как для Φ_1, так и для Φ_2, а это свойство, по условию, сохраняется и при новой расстановке.

Докажем теперь, что если указаны места, куда после новой расстановки попали фишки I,2,3 (рис.21б), то новая расстанов-

ка целиком известна.

Ясно, что фигура I,2,3 перейдет при новой раостановке в подобную же фигуру. Теперь заметим, что легко уотановить новое положение фишки 4, т.к. она должна попаоть в оооеднюю клетку с фишкой 2 и наискосок от фишки I.

Рис 22.

Далее таким же образом, можно найти новое положение фишки 5, затем фишки 6 и т.д.

Докажем теперь, что фигура I,2,3 при новой раостановке может лишь одвинутьоя как одно целое в некоторое новое положение. Действительно, если бы ,например, фигура I,2,3 перешла в фигуру I,2,3 (см.рис.22) ,то точка A_1 ,находящаяся через I00 клеток от точки I по направлению точки 2, перешла бы в точку A'. и расстояние между A и A' было бы больше I00 ом, что противоречит уоловию задачи .

Итак, новое положение получается из отарого сдвигом воех фишек в одном направлении на одно и то же расстояние, меньшее I00 см.

Задача № 12.

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – два многочлена такие, что если в некоторой точке $P(x)$ принимает целое значение, то и $Q(x)$ в этой точке принимает целое значение, и наоборот. Доказать, что или $P(x)+Q(x)$, или $P(x)-Q(x)$ постоянно.

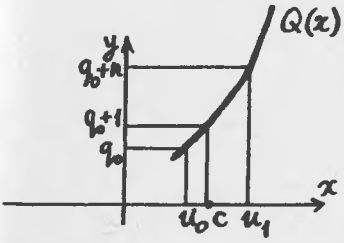


Рис 23.

Решение. Отметим сначала два свойства многочленов, которыми мы будем пользоваться:

1) для любого многочлена существует такое число x_0, что при $x > x_0$ многочлен или монотонно возрастает или монотонно убывает;

2) если два многочлена совпадают в бесконечном числе точек, то они равны.

Теперь выберем такое число x_0, что при $x > x_0$ и $P(x)$, и $Q(x)$ монотонны. Пусть, например, $P(x)$ и $Q(x)$ монотонно возрастают (остальные случаи рассматриваются аналогично). Возьмем какое-либо число $u_0 > x_0$, так что $P(u_0) = p_0$ (а значит и $Q(u_0) = q_0$) – целое. Возьмем теперь значение $u_1 > u_0$, т.ч. $P(u_1) = p_0 + 1$. Докажем, что $Q(u_1) = q_0 + 1$. Действительно, $Q(u_1)$ – целое и поэтому $Q(u_1) \geq q_0 + 1$. Если бы $Q(u_1) > q_0 + 1$, то на отрезке $[u_0, u_1]$ можно было бы найти точку c, в которой $Q(c) = q_0 + 1$ (рис. 23).

5-1207

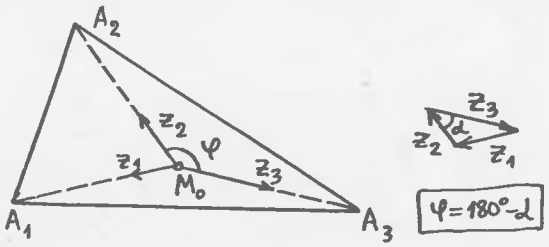


Рис 24.

Тогда мы имели бы $P(u_0)<P(c)<P(u_1)$ или $P_0 \le P(c) < P_0+1$, и, следовательно, $P(c)$ не могло бы быть целым, что противоречит условию, значит, $Q(u_1)=q_0+1$. Проведя наше рассуждение n раз, мы докажем, что если $P(u_n)=P_0+n$, то $Q(u_n)=q_0+n$ и т.д. Значит, многочлены $P(x)-P_0$ и $Q(x)-q_0$ принимают одинаковые значения в точках $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ и поэтому $P(x)-P_0=Q(x)-q_0$, или $P(x)-Q(x)=P_0-q_0$ постоянно.

Задача № 13. Можно ли разбить правильный треугольник на конечное число неравных правильных треугольников, меньших его ?

Решение. Докажем, что если правильный треугольник разбит на равные правильные треугольники, то этих треугольников бесконечно много.

Возьмем некоторую вершину большого треугольника. Она входит в некоторый треугольник разбиения, которому мы присвоим номер 1. Расомотрим фигуру $ADEC$ (см.рис.25).

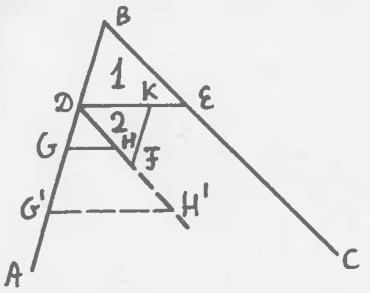


Рис 25.

К вершине D вдоль стороны DE примыкает некоторый треугольник, который мы обозначим 2. Очевидно, треугольник 2 меньше треугольника I.

Рассмотрим $\angle FDA$ и примыкающий к вершине D в этом угле треугольник GHD. Если $DH<DF$, то объявим ΔGHD треугольником 3. Теперь фигура $AGHF$ вполне аналогична фигуре $ADEC$ и, следовательно, мы найдем треугольник 4, меньший треугольника 3 и т.д.

Если же $DH'>DF$, то фигура $H'FKE$ вполне аналогична $ADEC$, так что треугольник 3 в этом случае мы будем искать в ней.

Итак, доказано, что можно указать последовательность треугольников разбиения I,2,3,4,... , такую, что каждый следующий треугольник меньше предыдущего. Значит треугольников бесконечно много. (Строгое доказательство проведите сами).

Задача № I4. См.задачу № 14 для 8 классов Вып. XI.

Задача № I5. Расомотрим квадрат. Внутри квадрата находится несколько равных попарно не пересекающихся кругов. Доказать, что квадрат можно разбить на выпуклые многоуголь - ники так, что в каждом из них будет содержаться ровно по одному кругу.

Решение. Заметим сначала, что если на плоскости заданы две точки A и B , что геометрическим местом точек, расстояние которых до A меньше, чем до B ,является полуплоскость ограниченная осью симметрии точек A и B (см.рис.26). Пусть теперь $A_1, \ldots, A_n$ - центры заданных кругов и $\rho_1(x), \ldots, \rho_n(x)$ - расстояния от некоторой точки квадрата до точек $A_1, \ldots, A_n$.

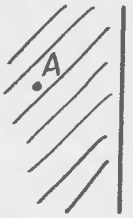


Рис 26.

Рассмотрим геометрическое место M_k точек X , расстояние которых от A_k меньше, чем от остальных точек (см.рис. 27). M_k представляет собой пересечение $(n-1)$ полуплоскостей :

$$\rho_k(x) < \rho_1(x),$$
$$\rho_k(x) < \rho_2(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\rho_k(x) < \rho_n(x)$$

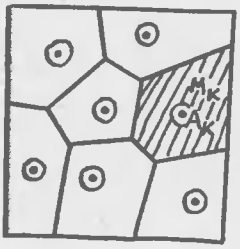


Рис 27.

и потому это выпуклый многоугольник, содержащий точку A_k. Докажем, что круг $\mathcal{D}_k$ с центром в A_k целиком лежит внутри M_k. Действительно, так как круги не пересекаются,

то любая точка D_k удалена от A_k на расстояние, меньшее чем ее расстояния до всех остальных точек $A_1, \dots, A_n$. Это и означает, что она входит в M_k. Так как кругов столько же, сколько и многоугольников M_k, что в каждом M_k заключен в точности один круг. Ясно, что $M_1, \dots, M_n$ образует нужное разбиение квадрата.

Задача № 16. Имеется многочлен $P(x)$ степени n, который в каждой целой точке принимает целое значение. Доказать, что все коэффициенты многочлена $n!\,P(x)$ – целые.

Решение. Докажем сначала, что любой многочлен $P(x)$ степени n можно представить в виде

$$P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 \frac{x(x-1)}{2!} + b_3 \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \dots + b_n \frac{x(x-1)\cdots(x-(n-1))}{n!} \quad (I)$$

Доказательство проведем индукцией по n. Если $n=1$, то это очевидно. Считая, что утверждение уже доказано для многочлена степени $n-1$, докажем его для многочленов степени n. Если $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, то

$$Q(x) = P(x) - n!\,a_n \frac{x(x-1)\cdots(x-(n-1))}{n!}$$ – многочлен степени $n-1$ и, следовательно, его можно представить в виде (I). Перенося член $n!\,a_n \dfrac{x(x-1)\cdots(x-(n-1))}{n!}$ в левую часть, получим требуемое представление для $P(x)$. Легко видеть, что если $k = 0, 1, 2, \dots, n$, то $P(k) = b_k + R_k$, где R_k – некоторая комбинация $b_0, \dots, b_{k-1}$ с целыми коэффициентами. Поэтому, из условия задачи следует, что все числа $b_0, b_1, \dots, b_n$ – целые, следовательно, многочлен $n!\,P(x)$ имеет целые коэффициенты.

Задача № I7. В каждой вершине пятиугольника написано некоторое число, меньшее тысячи, причем сумма всех этих чисел равна нулю. Каждое число заменяется полусуммой двух чисел, написанных в соседних вершинах, и эта операция повторяется тысячу раз. Доказать, что после этого каждое из чисел будет меньше I.

Решение. Обозначим через a_k, b_k, c_k, d_k, e_k числа, получающиеся в вершинах пятиугольника после того, как наша операция повторена к раз . (рис.28)

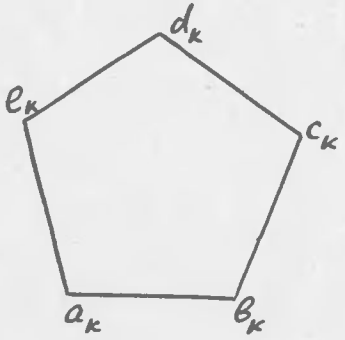


Рис 28.

Так как $a_0 = -b_0 - e_0 - c_0 - d_0$ то a_k можно выразить через b_0, c_0, d_0, e_0 . Из симметричности b_0, e_0 и c_0, d_0 ясно, что это выражение имеет вид:

$$a_k = \lambda_k(b_0+e_0) + \mu_k(c_0+d_0)$$

Аналогично,

$$b_k = \lambda_k(a_0+c_0) + \mu_k(e_0+d_0) \text{ и}$$

$$e_k = \lambda_k(a_0+d_0) + \mu_k(b_0+c_0).$$

По условию, $a_{k+1} = \frac{b_k + e_k}{2}$. Отсюда получаем:

$$\begin{cases} \lambda_{k+1} = \frac{\mu_k}{2} - \lambda_k, \\ \mu_{k+1} = \frac{\mu_k}{2} - \frac{\lambda_k}{2} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \lambda_{k+2} = \frac{\lambda_k}{4} - \frac{\lambda_{k+1}}{2}, \\ \mu_{k+2} = \frac{\lambda_k}{4}. \end{cases}$$

Заметим, что $\lambda_0 = -1$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.

Докажем теперь, что если r – положительный корень уравнения $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{4} = 0$,

то $|\lambda_k| \le r^k$.

Мы докажем даже более точные неравенства:

$$\begin{cases} 0 \ge \lambda_{2k} \ge -r^{2k} & (2)_k \\ r^{2k+1} \ge \lambda_{2k+1} \ge 0 & (3)_k \end{cases}$$

При $k=0$ (2) и (3) имеют место. Считая, что для $n=k$ неравенства (2), (3) имеют место, докажем их для $n=k+1$

$$\lambda_{2k+2} = \frac{\lambda_{2k}}{4} - \frac{\lambda_{2k+1}}{2},$$

откуда $\lambda_{2k+2} \le 0$ и $\lambda_{2k+2} \ge -\frac{r^{2k}}{4} - \frac{r^{2k+1}}{2} =$

$$= -r^{2k+2} + r^{2k}\left(r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{4}\right) = -r^{2k+2}$$

и т.д.

Аналогично доказывается и $(3)_{k+1}$. Заметим еще, что т.к. $|\mu_{k+2}| = \frac{|\lambda_k|}{4} < r^2|\lambda_k|$, то $|\mu_k| < |\lambda_k|$.

С другой стороны,

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{4} < 0{,}83.$$

Поэтому $|a_k| \le |\lambda_k||b_0 + c_0| + |\mu_k||c_0 + d_0| \le$

$$\le r^k \cdot 4000 < 0{,}83^k \cdot 4000.$$

Легко проверить, что $0{,}83^4 < \frac{1}{2}$, поэтому

$$|a_{1000}| < 0{,}83^{1000} \cdot 4000 < \frac{4000}{2^{250}} < 1.$$

Задача № 18. В языке племени Мумбо-Юмбо имеется три буквы $Г, Ы$ и $Е$. Буква Е - особан. Сказаннан сама по себе, отдельно, она означает некоторое слово, но будучи приписана в начале, в конце или где-нибудь в середине к другому слову, ояа не меняет значения этого слова. Известно, что когда людоед говорит ГГГ или ЫЫ или же ГЫГЫГЫ, то это то же самое, что Е (так что, например, ГГГГ значит Е Г, или проото Г). Доказать, что какова бы ни была численность этого племени, каждым двум людям можно дать разные имена.

Ремение. Пусть S_n означает слово, получающееся повторением сочетания $ГЫЫ$ n раз. Докажем, что все слова S_n различны (их и можно использовать в качестве имен). Для этого рассмотрим бесконечное количество троек предметов

$a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3, \ldots$, расположенных в определенном порядке. Сопоставим теперь каждому слову племени Мумбо-Юмбо некоторую перестаяовку этих предметов. Будем обозначать через (x, y, z) перестановку предметов x, y, z, при которой x занимает меото y, y место z, а z место x. Теперь сопоставим букве Е тождественную перестановку наших предметов (т.е. перестановку, при которой все предметы остаются на месте), а буквам $Г$ и $Ы$ перестановки:

$Г \to (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), (a_4, b_4, c_4), (a_5, b_5, c_5), \ldots$

$Ы \to (a_1, b_2, c_2), (a_2, b_4, c_4), (a_3, b_1, c_1), (a_4, b_6, c_6), (a_5, b_3, c_3), \ldots$

Условимся еще, что слову ствечает произведение перестановок, соответотвующих первой букве этого слова, второй и т.д (произведением перестановок называется их последовательное выполнение, например, $(123)(213) = (123)$).

Заметим, что это правило согласовано с тем, что слова ГГГ, ЫЫЫ и ГЫГЫГЫ означают то же, что и Е. Действительно, слову ГЫ соответствует перестановка:

$$ГЫ \to (a_1, c_1, b_2), (a_2, c_2, b_4), (a_3, c_3, b_1), (a_4, c_4, b_6), (a_5, c_5, b_3), \ldots$$

Теперь нетрудно проверить, что указанные слова соответствуют тождественной перестановке. Отсюда следует, что одинаковым словам отвечают одинаковые перестановки. Легко проверить, что слову S_n отвечает перестановка, ставящая a_1 на место a_{2n+1} и, следовательно, перестановки, соответствующие разным S_n, различны. Таким образом, и сами эти слова различны.

Задача № 19. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что каждая из его диагоналей AD, BE, CF разбивает этот шестиугольник на два равновеликих четырехугольника. Доказать, что диагонали AD, BE, CF пересекаются в одной точке.

Решение. Обозначим цифрами $1, 2, \ldots, 6$ -последовательные области (треугольники или четырехугольники), на которые шестиугольник разбивается диагоналями, а через S – площадь треугольника PQR (рис.29а). По условию задачи,

(I) $S_1+S_2+S_3=S_4+S_5+S_6+S$,

(2) $S_3+S_4+S_5=S_1+S_2+S_6+S$,

(3) $S_1+S_6+S_5=S_2+S_3+S_4+S$.

Вычитан из равенотва (I) равенство (2) и из (2)- (3) , получаем, что

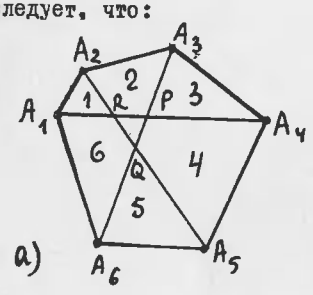
(4) $S_1-S_4=S_5-S_2=S_3-S_6$

Сложим теперь все три равенства:

$$3S=(S_1-S_4)+(S_5-S_2)+(S_3-S_6).$$

Отсюда и из (4); $S_1=S_4+S$; $S_5=S_2+S$; $S_3=S_6+S$, т.е. противоположные треугольники имеют равные площади.

С другой стороны, поскольку углы при общей вершине таких треугольников равны, из известной формулы $S=\frac{1}{2}ab\sin\varphi$ следует, что:



а)

$$A_1R\cdot A_2R=A_5R\cdot A_4R$$
$$A_6Q\cdot A_5Q=A_2Q\cdot A_3Q$$
$$A_3P\cdot A_4P=A_1P\cdot A_6P.$$

Перемножая эти равенства, получаем, что

$$A_1R\cdot A_2R\cdot A_3P\cdot A_4P\cdot A_5Q\cdot A_6Q=$$
$$=A_1P\cdot A_2Q\cdot A_3Q\cdot A_4R\cdot A_5R\cdot A_6R \quad (5)$$

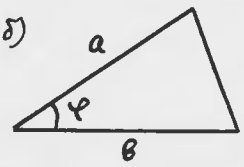


Рис 29.

Но любой из отрезков, входящих в правую часть этой формулы, больше соответствующего отрезка из левой части , если только точки P,Q,R не совпадают. Поэтому (5)

возможно лишь при условии, что $P=Q=R$, что и требовалось доказать.

Задача № 20. При каких k верна теорема: из того, что $\frac{1}{A}=\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{A+B+C}$ следует, что

$$\frac{1}{A^k}+\frac{1}{B^k}+\frac{1}{C^k}=\frac{1}{A^k+B^k+C^k}$$

Решение. Равенство

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{A+B+C} \qquad (1)$$

после приведения к общему знаменателю записывается в виде:

$$(A+B+C)(AB+AC+BC)=ABC.$$

Однако, как легко проверить,

$$(A+B+C)(AB+AC+BC)-ABC=(B+C)(A+B)(A+C),$$

поэтому из условия задачи следует, что хотя бы один из этих 3-х сомножителей равен 0.

Пусть, например, $A+B=0$, т.е. $B=-A$. Тогда, очевидно, при любом нечетном k верно равенство

$$\frac{1}{A^k}+\frac{1}{B^k}+\frac{1}{C^k}=\frac{1}{A^k+B^k+C^k}, \qquad (2)$$

т.е. обе части равны $\frac{1}{C^k}$.

Если же k - четное, то равенство (2) не является следствием (I), как показывает пример:

$$A=C=1;\ B=-1.$$

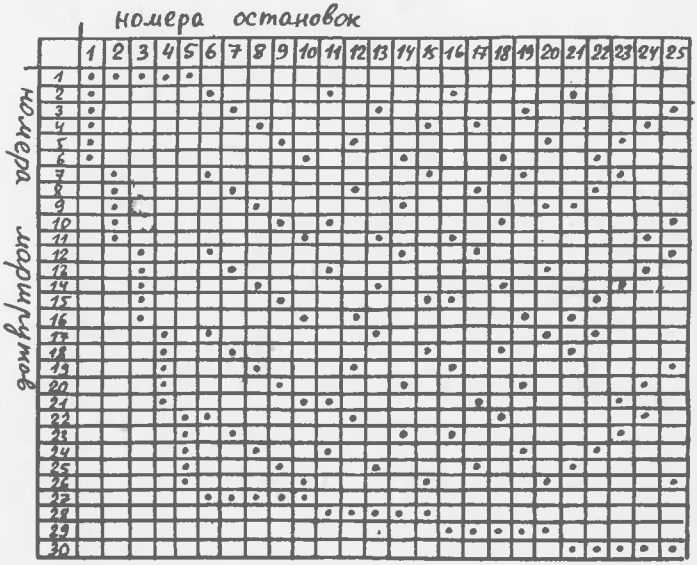
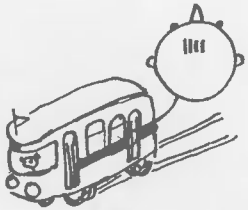
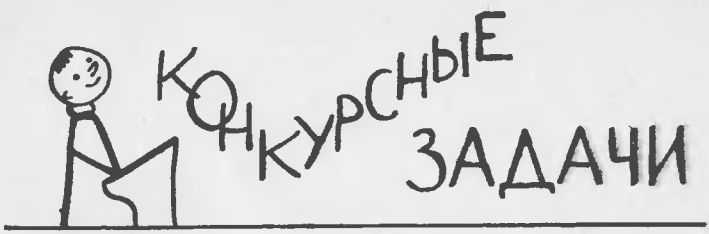


Рис 30.





7 класс

27. Поместить в кубе со стороной I квадрат наибольшей величины.

28. Построить замкнутую восьмизвенную ломаную линию, пересекающую каждое свое звено ровно I раз. Существуют ли четырех и десятизвенные ломаные, обладающие тем же свойством?

29. Из I0 шаров два радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар или нет (не нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке).
Доказать, что за 6 проверок всегда можно выделить оба радиоактивных шара.

30. Выписываются числа I,2,3 ... I000000000. Затем каждое из чисел заменяется суммой его цифр и т.д. до тех пор, пока в ряду не будет только однозначные числа. Каких чисел в этом ряду будет больше: единиц или пятерок?

3I. Найти две последние цифры числа $I87^{A2}$.

32. Докажите, что если числа К и $К^2 + 2$ простые, то числа $К^3 + 2$ - тоже простое.

33. Из точки О исходят три луча. На одном из лучей дана точка А. Построить квадрат, три вершины которого лежат на данных лучах, причем одна из этих вершин совпадает с точкой А.

34. Расположить на плоскости 6 точек так, чтобы любые 3 из них были вершинами равнобедренного треугольника.

35. В выражении I:2:3:4:5:6:7:8:9 расставить скобки так, чтобы после вычислений получилось а/ наибольшее; б/ наименьшее из всех возможных чисел.

36. Точка К перемещается по стороне АВ треугольника АВС. Найти геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника АСК.

37. IO окружностей делят плоскость на несколько частей. Доказать, что плоскость можно закрасить двумя красками так, что каждая часть будет закрашена одной краской, а 2 части, граничащие по дуге - разными красками.

38. Дана последовательность попарно различных, не равных нулю чисел $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.
Если 2 рядом стоящих члена этой последовательности имеют разные знаки, то мы будем говорить, что последовательность в этом месте меняет знак. Пусть М- общее число перемен знака у последовательности. Доказать, что число перемен знака в последовательности $\{A_2-A_1, A_3-A_2, \ldots, A_n-A_{n-1}\}$ не меньше М-I.

39. Рассмотрим последовательность чисел I, 3, 3^2, 3^3, ..., 3^{1000}. Каждое из чисел этой последовательности записано одним из трех карандашей: красным, синим и зеленым. Доказать, что сумма красных чисел не может быть равна сумме зеленых чисел.

40. Система из 1967 несовпадающих точек плоскости при повороте на угол A вокруг некоторой точки O переходит в себя (т.е. любая точка системы переходит снова в некоторую точку системы). Какие значения может принимать угол A?

41. Найти все числа, меньшие 1000, квадрат которых оканчивается двумя равными цифрами, отличными от нуля.

42. Выпуклой называется фигура, содержащая вместе с каждыми двумя точками весь отрезок, соединяющий эти точки. Доказать, что каждая выпуклая фигура Ф, которую можно накрыть некоторым кругом, содержит две непересекающиеся фигуры Φ_1 и Φ_2, подобные Ф с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

43. В треугольник вписана окружность. Точки касания являются вершинами второго треугольника, в который так же вписана окружность, точки касания которой - вершины третьего треугольника. Доказать, что он имеет те же углы, что и первоначальный треугольник.

44. Доказать, что на плоскости нельзя расположить больше четырех выпуклых многоугольников так, чтобы каждые два из них имели общую сторону.

45. Каждая грань куба заклеивается двумя равными прямоугольными треугольниками с общей гипотенузой, один из которых - белый, другой - черный. Можно ли эти треугольники расположить так, чтобы при каждой вершине куба сумма белых углов была равна сумме черных углов?

8 класс

32. Из всех квадратов, которые можно поместить в куб со стороной 1, найти тот, который имеет наибольшую площадь.

33. Найти две последние цифры числа $3^{(5^{17})}$.

34. Дан выпуклый четырехугольник. Построить четырехугольник с теми же сторонами (не не обязательно в том же порядке) и с той же площадью, но не равный данному .Когда задача имеет решение?

35. На Марсе расположено 1967 марсодромов. В некоторый момент с каждого из них поднимается летающая тарелка и летит к ближнему марсодрому. Доказать, что после того, как они сядут, по крайней мере на 394 марсодромах будут летающие тарелки.

36. Расположить в пространстве 8 точек так, чтобы любые 3 из них были вершинами равнобедренного треугольника.

37. Смотри задачу № 35 для 7-х классов.

38. Доказать, что существует ровно 8 способов обойти конем все клетки шахматной доски размером 3x4 и среди них нет ни одного способа, при котором конь последним ходом может вернуться в клетку, на которой он вышел (замкнутый маршрут).

39. Прямая E пересекает стороны AB и AC треугольника ABC. Через вершины B и C проведены прямые, параллельные E до пересечения со сторонами (продолжениями сторон) AB и AC в точках B_I и C_I соответственно. Доказать, что площадь треугольника ABC равна среднему геометрическому площадей треугольников ABC_I и AB_IC.

40. Смотри задачу № 38 для 7-х классов.

41. Найти числа $X_1, X_2, \ldots, X_{1000}$ такие, что $|X_n| \le 1$ и что сумма $X_1 \cdot X_1 + X_1 \cdot X_2 + \cdots + X_1 \cdot X_{1000} + X_2 \cdot X_2 + \cdots + X_{999} \cdot X_{1000}$ всевозможных попарных произведений наименьшая.

42. См.задачу № 39 для 7 классов.

43. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{1}{2}\left(X_n + \frac{4}{X_n}\right) \\ X_2 = \frac{1}{2}\left(X_1 + \frac{4}{X_1}\right) \\ X_3 = \frac{1}{2}\left(X_2 + \frac{4}{X_2}\right) \\ \cdots\cdots \\ X_n = \frac{1}{2}\left(X_{n-1} + \frac{4}{X_{n-1}}\right) \end{cases}$$

44. Сколько фигур, получаемых из данной выпуклой фигуры сжатием в два раза и параллельными переносами, можно поместить в нее без пересечения (разрешаются касания)? Указать все возможности.

45. На планете Аполлон расположено некоторое количество государств, причем в каждой точке границы сходится четное число государств. Доказать, что карту планеты Аполлон можно раскрасить двумя цветами так, чтобы соседние страны были раскрашены разными цветами.

Примечание: Планета Аполлон имеет форму шара. Нейтральных территорий на планете нет.

46. A_1, A_2, A_3, A_4 – длины последовательных сторон четырехугольника, M – его площадь. Доказать, что

$$M \le \frac{1}{4}(A_1 + A_3)(A_2 + A_4)$$

47. Дано: $2^n = 10^{8+B}$. Доказать, что если $n > 3$, то AB делится на 6. Здесь n, A, B – целые положительные числа, $B < 10$.

48. Квадратная таблица из 49 клеток заполнена числами от одного до семи так, что в каждом столбце и в каждой строке встречаются все эти числа. Если таблица симметрична относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, то на этой диагонали встречаются все эти числа. Доказать.

49. Доказать, что при любом целом положительном n сумма

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}.$$

50. Можно ли составить прямоугольный параллелепипед из конечного числа попарно различных кубов?

51. Обозначим через А наибольшее число непересекающихся кругов диаметра I, центры которых лежат внутри многоугольника М, через В – наименьшее число кругов радиуса I, которыми можно покрыть весь многоугольник М. Какое число больше, А или В?

9-I0 класс

33. Решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} К + У &= 9 \\ К + И &= 6 \\ КУ &= КИ \\ К^4+У^4+К^4+И^4 &= 4369. \end{aligned}\right\}$$

34. Какое максимальное количество дуг большого круга по 300^0 каждая можно расположить на сфере так, чтобы никакие две из них не имели общих точек?

35. Последовательность чисел $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ строится так:

$$A_1 = 1;\ A_2 = 1 \text{ и } A_n = \frac{A_{n-1}+2}{A_{n-2}} \quad \text{при } n \geq 3.$$

Доказать, что все члены этой последовательности целые.

36. Дана бесконечная арифметическая прогрессия, у которой первый член и разность – натуральные числа. Доказать, что в этой прогрессии найдется член, в записи которого встречается цифра 0.

37. Дана последовательность не равных нулю чисел $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Если $A_n \cdot A_{n-1} < 0$, то мы будем говорить, что на n-ом месте последовательность имеет перемену знака. Предполагая, что все члены последовательности $A_1, A_1+A_2, A_1{}^2A_2+A_3, \ldots, A_1+A_2+A_3+\ldots A_n, \ldots$ не равны 0, доказать, что эта последовательность имеет не более перемен знака, чем исходная.

38. В треугольник вписаны две окружности, касающиеся друг друга, радиусов C_1, C_2, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Доказать, что C_1+C_2 больше радиуса вписанной окружности.

39. Двое играют в такую игру: первый выбирает любое целое число от 1 до 20 и снабжает его знаком: + или −. Второй выбирает какое-либо из оставшихся 19 чисел, снабжает его знаком и приписывает к 1-му числу. Затем число снова выбирает первый и т.д. В результате получается некоторая сумма A (например: 20−19+1+10−5...). Найти такое число K, чтобы первый игрок всегда мог добиться $|A| \leq K$, а второй мог помешать ему сделать $|A| < K$.

40. Пусть А и В – взаимно-простые числа. Число П называется "хорошим", если существуют такие неотрицательные числа Х,У, что П = АХ + ВУ. Доказать, что можно найти такое С, что либо П, либо С – П хорошее число.

41. На планете Аполлон расположено некоторое количество государств, причем в каждой точке границы сходится четное число государств. Доказать, что карту планеты Аполлон можно раскрасить двумя цветами так, чтобы соседние страны были раскрашены разными цветами.

Примечание: Планета Аполлон — плоская и каждая из стран имеет площадь не менее 1 км^2.

42. Пусть Ф – сумма длин ребер некоторого многогранника а Р – наибольшее расстояние между его вершинами. Доказать, что $\Phi > 3P$.

43. Доказать, что число цифр в последовательности $1,2,3,4,\ldots,10^K$ равно числу всех нулей в последовательности $1,2,3,\ldots,10^{(K+1)}$.

44. Дано n целых чисел $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, причем $A_1 = 1$ и $A_K \le A_{K+1} \le 2A_K$ $(K = 1,2,\ldots,n-1)$ и сумма всех чисел четна. Можно ли эти числа разбить на две группы так, чтобы суммы чисел в этих группах были равны?

45. В квадрате со стороной 100 расположено К кругов радиуса 1, причем всякий отрезок длины 10, целиком расположенный внутри квадрата, пересекает хотя бы один круг. Доказать, что К $\geqslant$ 400.

46. Два равных правильных треугольника расположены в пространстве в параллельных плоскостях Π_1 и Π_2, причем отрезок, соединяющий их центры, перпендикулярен плоскостям. Найти множество точек, являющихся серединами всех отрезков, соединяющих точки одного треугольника с точками другого треугольника.

47. Можно ли составить прямоугольный параллелепипед из конечного числа попарно различных кубов?

48. Точка К – центр шара, вписанного в правильный тетраэдр АВСД. Прямая ОК, соединяющая К с точкой О, лежащей внутри тетраэдра, пересекает плоскости граней в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Доказать, что

$$\frac{A_1O}{A_1K} + \frac{B_1O}{B_1K} + \frac{C_1O}{C_1K} + \frac{D_1O}{D_1K} = 4.$$

49. Дан выпуклый многогранник. Внутри него содержится несколько шаров различных радиусов, причем никакие два шара не имеют общих точек. Доказать, что данный выпуклый многогранник можно разбить на выпуклые многогранники так, что в каждом из них содержалось бы ровно по одному шару.

Летний конкурс ВМШ

В летнем конкурсе ВМШ могут принять участие все школьники гор. Москвы.

Решения задач присылать по адресу:

Москва В-234, МГУ, мех.-мат., кафедра теории вероятностей , 7-8 классы – А.Л.Розенталю,

9-10 классы – С.Молчанову

7-8 классы.

1. Собралось 9 человек. Доказать, что среди них найдутся или 3 попарно знакомых между собой людей, или 4 попарно незнакомых.

2. На конкурсе ВМШ каждую задачу правильно решило 5 человек и каждый участник правильно решил 5 задач. Доказать, что можно так организовать разбор задач, что каждый участник конкурса будет разбирать ровно одну из решенных им задач и все задачи будут разобраны.

3. Квадрат разбит на 100 равновеликих частей двумя способами. Доказать, что можно выбрать 100 точек так, чтобы в каждой части 1-го разбиения и в каждой части второго было ровно по одной точке.

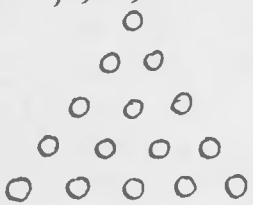
4. Каково наименьшее число коней, которых нужно расставить на обычной (8×8) шахматной доске так, чтобы все поля были под ударом (поле, на котором стоит конь, считается находящимся под ударом)?

5. Из квадрата 3x3 см вырежем квадрат 2x2 см , имеющий общую вершину с первым. Доказать, что такими "уголками " нельзя замостить никакого прямоугольника.

6. В прямоугольник со сторонами a и b вписан четырехугольник так, что на каждой стороне прямоугольника лежит одна вершина четырехугольника , а в четырехугольник-квадрат со стороной I, которая параллельна стороне исходного прямоугольника. Доказать, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1$.

7. Последовательность чисел $1, 1, 2, 3, 7, 22, \ldots$ строится по такому правилу: первые два члена равны I, а каждый следующий на I больше произведения 2-х предыдущих . Встретится ли в этой последовательности число, делящееся на 4 ?

8.*) В каждый из кружочков фигуры вписано одно из чисел $1, 2, \ldots, 15$. Какова вероятность того, что каждое число в таблице больше обоих чисел, стоящих под ним ?



*) Задачи №9 и №10 для 7-8 классов см. на стр. 87.

9-10 классы.

I. Доказать, что существуют сколь угодно длинные участки натурального ряда, целиком состоящие из чисел, делящихся на полный квадрат.

2. Доказать, что не существует таких целых чисел x, y, что

$$x^3 + 7 = y^2.$$

3. Квадрат со стороной I разбит двумя способами на I00 равновеликих частей. Доказать, что существуют I00 многоугольников, площадь каждого из которых не меньше $\frac{I}{I0000}$, такие, что в каждой части первого разбиения и в каждой части второго разбиения находится ровно по одному многоугольнику.

4. Все десятизначные числа, составленные из цифр I,2,3 записаны в столбик. Затем к этой таблице приписывается еще один столбец, состоящий из цифр I,2,3, так что каждое число становится одиннадцатизначным. Оказывается, что:

а). К числам I ... I ; 2 ..... 2; 3 ..... 3 приписаны соответственно цифры I,2 и 3.

б). Если два десятизначных числа отличались во всех I0-ти разрядах, то они отличаются и в приписанном IIом разряде.

Доказать, что приписанный столбец совпадает с одним из написанных ранее, (т.е. либо со столбцом единиц, либо десятков, либо сотен, и т.д.).

5. Каждый член бригады садоводов собрал по 1000 яблок. Эти яблоки были уложены в корзины по 1000 яблок в каждой корзине. Доказать, что можно так распределить эти корзины между садоводами, что каждому достанется корзина, в которой есть некоторое количество яблок, собранных им самим.

6. На плоскости задано n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$. и окружность радиуса 1. Доказать, что на ней найдется такая точка A, что сумма квадратов расстояний от точки A до точек $A_1, \ldots, A_n$ не меньше n.

7. Выбрать из последовательности 1,2, ... , 1967 наибольшее количество чисел так, чтобы все их попарные суммы не делились на 26.

8. Уголком $n \times m$ называется фигура, полученная из прямоугольника, размером n см. $\times$ m см., удалением из него прямоугольника $(n-1)$ см. $\times$ $(m-1)$ см., имеющего с первым общую вершину. При каких n и m такими уголками можно замостить:

A) какой-либо прямоугольник;

B) какую-либо бесконечную полосу;

C) всю плоскость ?

9. Сколько решений имеет система уравнений :

$$\begin{cases} \cos x_1 = x_2 \\ \cos x_2 = x_3 \\ \cdots \\ \cos x_{n-1} = x_n \\ \cos x_n = x_1 \end{cases} ?$$

10. Доказать, что не существует таких целых положительных чисел x, y, z, t, что $1967(x^2+y^2) = z^2+t^2$.

7-8 классы.

9. В таблице $n \times n$ выписаны некоторые числа. Крестом называется совокупность чисел некоторой строки и некоторого столбца. Известно, что сумма чисел любого креста равна 0. Доказать, что все числа равны 0.

10. Решить в целых числах уравнение:

$$x^3+x^2-2x-1=y^2$$

ГОТОВИМСЯ В ВУЗ

По традиции мы публикуем материалы вступительных экзаменов в ведущие вузы страны.

Ниже приведены варианты письменного экзамена по математике, предлагавшиеся летом 1966 года на механико-математическом и физическом факультетах Ленинградского университета. На экзамен отводилось 5 астрономических часов.

ВАРИАНТ 6.I

I. Ракета должна пройти отрезок, равный H. Она начинает движение с постоянной скоростью v и в любой момент времени может включить дополнительный двигатель, дающий постоянное ускорение a ($a>0$) и работающий до конца пути. Расход топлива на участке пути с постоянной скоростью пропорционален времени движения, а при включенном дополнительном двигателе - квадрату времени с коэффициентами пропорциональности k_1 и k_2 соответственно (k_1, $k_2>0$). Какое время ракета должна двигаться с включенным дополнительным двигателем, чтобы общий расход топлива был наименьшим?

2. Решить уравнение:

$$x-\sqrt{a-x^2}=1$$

3. Решить неравенство:

$$\sin^2 x \le a^2 \sin^2 3x \qquad (a>0)$$

4. У двух четырехугольников совпадают середины сторон. Доказать, что их площади равны.

5. В куб с ребром a вписан цилиндр так, что его ось лежит на диагонали куба, а плоскость каждого из оснований проходит через три вершины куба. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

ВАРИАНТ 6.2

I. Два тела, находящиеся друг от друга на расстоянии h, начинают двигаться по прямой, соединяющей эти тела, с постоянными ускорениями a_1 и a_2 (допускаются как равноускоренные, так и равнозамедленные движения). В начальный момент направления скоростей v_1 и v_2 таковы, что тела начинают двигаться навстречу друг другу. При каких соотношениях между h, a_1, a_2, v_1, v_2 встреча двух тел произойдет ровно один раз?

2. Решить неравенство:

$$\log_x (x-a) > 2.$$

3. Решить уравнение:

$$tg\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - k\,tgx + tg\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

4. Доказать, что в трапецию можно вписать окружность тогда и только тогда, когда окружности, построенные на боковых сторонах трапеции как на диаметрах, касаются друг друга.

5. На горизонтальной плоскости расположены четыре шара одного и того же радиуса r так, что их центры являются

вершинами квадрата со стороной a . Всех этих четырех шаров касается сверху, не задевая плоскости, пятый шар радиуса R . Найти расстояние от верхней точки пятого шара до плоскости. Каким условиям подчинены числа r , a , R ?

ВАРИАНТ 6.3

I. Ракета падает по вертикали на землю с высоты h под действием силы земного притяжения, имея начальную скорость v_0. При включении тормозных двигателей ракета начинает равнозамедленное движение, теряя в скорости каждую секунду g м/сек (g - ускорение силы тяжести). В какой момент времени от начала падения следует включить двигатели, чтобы приземление произошло с нулевой скоростью ("мягкая посадка")?

2. Решить неравенство:

$$\frac{1+\sin x}{1+\cos x}+\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\le a .$$

3. Решить уравнение:

$$x+\sqrt{x(a-x)}=1.$$

4. Внутри круга радиуса r с центром O находится точка A , отстоящая от O на расстоянии a ($a>0$). Под каким наибольшим углом можно увидеть отрезок OA из точки на окружности?

5. Через вершину куба проведена плоскость, так что в сечении получился равнобедренный треугольник с углом α при основании. Найти углы между секущей плоскостью и гранями куба.

ВАРИАНТ 6.4

I. Тело дважды сбрасывается в воду с некоторой высоты без начальной скорости; при этом измеряется глубина погружения за I секунду после вхождения в воду. Установлено, что если начальная высота изменяется в k раз, то глубина погружения изменяется в ℓ раз. При каких соотношениях между k и ℓ тело тонет в воде? (Сопротивлением воздуха и воды пренебречь).

2. Решить уравнение:

$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1} = a.$$

3. Решить неравенство:

$$\cos x - \frac{1}{\cos x} \leq a \qquad (a>0).$$

4. Центры четырех окружностей радиуса a находятся в вершинах квадрата со стороной a. Найти площадь фигуры, образованной дугами этих четырех окружностей и лежащей внутри квадрата.

5. Пусть AP, BP, CP, - ребра куба с общей вершиной P. Через вершину C и середины ребер AP и BP проведена плоскость. Найти расстояние от центра куба до этой плоскости, если ребро куба равно a.

ВАРИАНТ 6.5

I. Ракета, стартовав с нулевой начальной скоростью, движется вертикально вверх вначале с постоянным ускорением a, а затем, после выключения двигателя, переходит в свободный полет под действием силы тяжести (ускорение силы тяжести g). В какой момент следует выключить двигатель для того,

чтобы через время t после запуска ракета находилась на высоте h ?

2. Решить уравнение:

$$tg(x+a)-3tgx+tg(x-a)=0.$$

3. Решить неравенство:

$$\log_{\frac{1}{x}}(a-x)<1.$$

4. Центры трех окружностей радиуса a находятся в вершинах правильного треугольника со стороной $a\sqrt{2}$. Найти площадь фигуры, образованной дугами этих трех окружностей и лежащей внутри треугольника.

5. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно ℓ, а угол при вершине между противоположными ребрами равен 2α, $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$. Через вершину A основания $ABCD$ проведена плоскость, параллельная диагонали основания BD и проходящая через центр описанного шара. Найти площадь сечения.

Подп. к печати 10/У-87г. Л-41926. Ф. 60x90 1/16
Физ.п.л. 5,5. Уч.-изд.л. 3,75. Зак. 1357. Тир. 1000
Цена 11 коп.

Отпечатано на ротапринтах в тип. Изд-ва МГУ
Москва, Ленинские горы.